Interrogation du 07/10/2025

NOM Prénom :

1. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$. Donner les formules pour les quatre sommes de référence suivantes.

   a) $\boxed{\sum\limits_{k=p}^{q} a = a \times (q-p+1)}$

   b) $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$

   c) $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

   d) $\boxed{\sum\limits_{k=p}^{q} x^k = x^p \times \frac{1-x^{q-p+1}}{1-x}}$

2. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$. Soient $u_p, \dots, u_{q+1}$ des nombres réels. Donner la formule pour calculer une somme télescopique.

$$\sum_{k=p}^{q} (u_k - u_{k+1}) = u_p - \cancel{u_{p+1}} + \cancel{u_{p+1}} - \cancel{u_{p+2}} + \dots + \cancel{u_{q-1}} - \cancel{u_q} + \cancel{u_q} - u_{q+1}$$
$$\boxed{= u_p - u_{q+1}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

   a) $S_1 = \sum\limits_{k=3}^{50} k$

   b) $S_2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$

   c) $S_3 = \sum\limits_{k=1}^{n} (2k+1)$

   d) $S_4 = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$

a) $S_1 = \sum\limits_{k=3}^{50} k$

$= \sum\limits_{k=1}^{50} k - 1 - 2$

$= \frac{50 \times 51}{2} - 3$

$= 25 \times 51 - 3$

$\boxed{= 1272}$

b) $S_2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{2}}$

$\boxed{= 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$

Tournez la page ➔

c) $S_3 = \sum_{k=1}^{n} (2k+1)$

$= 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$

$= \cancel{2}\,\dfrac{n(n+1)}{\cancel{2}} + 1 \times (n-1+1)$

$= n(n+1) + n$

$\boxed{= n(n+2)}$

d) $S_4 = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k}\right)$

$= \cancel{\dfrac{1}{2}} - 1 + \cancel{\dfrac{1}{3}} - \cancel{\dfrac{1}{2}} + \dots + \cancel{\dfrac{1}{n}} - \cancel{\dfrac{1}{n-1}} + \dfrac{1}{n+1} - \cancel{\dfrac{1}{n}}$

$\boxed{= \dfrac{1}{n+1} - 1}$ par télescopage