TD 01 – Étude qualitative d'une fonction

1 Vocabulaire de base

Exercice 1 – Domaine de définition. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x+3}$

b) $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$

c) $f_3 : x \mapsto \sqrt{2x+1}$

d) $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2-4x+3}$

e) $f_5 : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{3}x-5\right)$

f) $f_6 : x \mapsto \ln(x+3)-\ln(2x+1)$

g) $f_7 : x \mapsto x^{\frac{1}{7}}$

h) $f_8 : x \mapsto \exp(3x+2)$

Exercice 2 – Domaine de définition. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{4-x^2}$

b) $f_2 : x \mapsto e^x \ln(2x+3)$

c) $f_3 : x \mapsto \ln(e^x-1)$

d) $f_4 : x \mapsto \ln(\ln(x))$

Exercice 3 – À valeurs dans.... Déterminer, pour chaque fonction ci-dessous, un intervalle dans lequel la fonction prend ses valeurs.

a) $x \mapsto x^2+1$

b) $x \mapsto \exp(x-1)$

c) $x \mapsto 2\sin(x)$

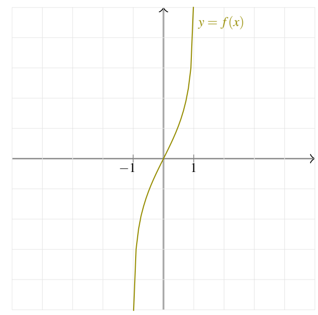
Exercice 4 – Composition de fonctions. Déterminer, lorsque cela est possible, $f \circ g$ et $g \circ f$ *(on donnera, quand c'est possible, l'ensemble de définition et l'expression de la composée).*

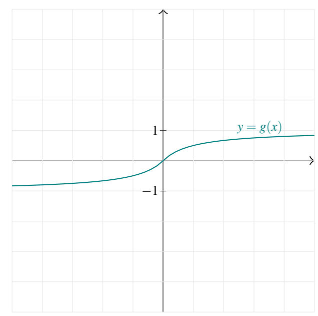
1. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$ $\qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x-1 \end{array}$

2. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ $\qquad g : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$

3. $f : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$ $\qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-1 \end{array}$

Exercice 5 – Représentation graphique. Pour les fonctions suivantes, à partir du graphe, donner : le domaine de définition, la parité, la monotonie, les éventuels minorants, majorants et extrema.





Exercice 6 – Calcul de dérivées. Pour chaque fonction suivante, donner le domaine de définition, calculer sa dérivée et donner le domaine de définition de sa dérivée.

a) $x \mapsto 13x^2+3x-49$

b) $x \mapsto \frac{1}{3x}$

c) $x \mapsto \frac{3}{4x+2}$

d) $x \mapsto \sqrt{x+1}$

e) $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$

f) $x \mapsto \frac{4x+8}{21x-3}$

g) $x \mapsto \frac{1}{x^2}$

h) $x \mapsto 1+\ln(1+x)$

i) $x \mapsto \frac{\exp(2x)}{x^2-1}$

Exercice 7 – Parité/imparité. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. On définit les trois fonctions suivantes, f_1, f_2 et f_3

$$f_1 : x \mapsto \frac{x^2}{x^4+1}; \quad f_2 : x \mapsto \sin(2x)\cos(x); \quad f_3 : x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$$

Montrer que f_1 est paire, f_2 est impaire (sur leurs ensembles de définition respectifs) et f_3 est ni paire, ni impaire sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la parité des fonctions suivantes (en précisant au préalable leur ensemble de définition).

$$f_4 : x \mapsto e^x - e^{-x}; \quad f_5 : x \mapsto x^2 \ln(x); \quad f_6 : x \mapsto x^3 + \frac{1}{x}$$

3. Que dire (en terme de parité) de la somme de deux fonctions paires ? De la somme de deux fonctions impaires ? De la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
4. Démontrer qu'une fonction polynomiale de degré 2 admettant deux racines qui sont opposées est paire.

Exercice 8 – Vrai/Faux sur la parité. Indiquer si les affirmations qui suivent sont vraies ou fausses. Lorsque les affirmations sont fausses, donner un contre-exemple. Dans toutes les questions, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Si $f(1) = f(-1)$ alors f est paire.
2. Si f est impaire alors $f(2) = -f(-2)$.
3. Si f est paire alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = f(-x_0)$.
4. S'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(-x_1) = -f(x_1)$ avec $f(x_1) \neq 0$ alors f n'est pas paire.

Exercice 9 – Oral CCINP PC 2014. Soient $a > 0$ et f une fonction paire, dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = f(x+a)$$

1. Montrer que f' est impaire.
2. Montrer que f'' est définie et paire.
3. Prouver que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(a+x) + f(a-x) = 0$$

4. Montrer que $f'' + f = 0$.

Exercice 10 – Périodicité. Montrer que la fonction suivante est 4π-périodique.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(2x) - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \end{array}$$

Exercice 11 – Oral CCINP TSI 2021. Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par,

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = x^2$$

Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi, 3\pi]$.

Exercice 12 – Monotonie et inégalités. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Montrer que pour tout $x \in [1, 3[$, on a

$$-2 \leqslant -\frac{2}{x^2} \leqslant -\frac{2}{9}.$$

2. Montrer que pour tout $x \in [-3, 2]$, on a

$$\frac{1}{6} \leqslant \frac{3}{(x-1)^2 + 2} \leqslant \frac{3}{2}.$$

3. Montrer que pour tout $u \in [1, 4]$, on a

$$\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{\sqrt{u} + u - 1} \leqslant 1.$$

4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $2 \leqslant a \leqslant 3$ et $1 \leqslant b \leqslant 2$. Montrer que l'on a

$$2 \leqslant a^2 - \frac{2}{b} \leqslant 8.$$

Exercice 13 – Étude complète d'une fonction. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 - 3x + 1 \end{array}$$

1. Dresser le tableau de variations de f. *On admet que*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2. Tracer l'allure la courbe représentative de la fonction f.
3. La fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ? Si oui, préciser sa valeur et le ou les valeurs en le(s)quel(s) il est atteint.
4. La fonction f est-elle paire ? impaire ? Justifier.

Exercice 14 – Écrit ECRICOME ECE 2023. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x-1}{2x} f(x).$$

2. Dresser le tableau de variations de f. *On admet que*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
4. *La fonction admet-elle un minimum ? un maximum ?*

Exercice 15 – Oral CCINP TSI 2023. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = nx + \frac{1}{1 + e^x}$$

1. Justifier que f_n est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et calculer f_n''.
2. Montrer que $f_n''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 0$.
3. En déduire les variations de f_n.

Exercice 16 – Écrit EMLYON Maths E 2024. Soi $k \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f_k(x) = (x+1)e^{kx}$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Dresser le tableau de variations de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et 0. *On admettra que*

$$\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f_k(x) = +\infty$$

2. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$. Vous préciserez leurs points d'intersection.
3. Dessiner sur un même graphique l'allure de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.

Exercice 17 – Autour de la fonction inverse. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x} < 4$? *On commencera par représenter la fonction inverse pour résoudre graphiquement cette inéquation.*
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{1}{x^2+1} \leqslant 1$.

Exercice 18 – Calculs algébriques avec la racine carrée. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers (avec b le plus petit possible).
   a) $\sqrt{28}+\sqrt{63}$
   b) $\sqrt{6}+\sqrt{24}+\sqrt{54}$
   c) $9\sqrt{20}-5\sqrt{45}-2\sqrt{180}$
2. Montrer que le nombre suivant est un entier (à déterminer),
$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$
On pourra mettre les deux fractions au même dénominateur.
3. On pose
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
Montrer que
$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad \text{et} \qquad \varphi^2 = 1+\varphi.$$

Exercice 19 – Calculs algébriques sur les puissances. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Simplifier au maximum les expressions suivantes.
$$A = 2^3\times(4\times 3)^2 \qquad B = \frac{7^7}{7^4} \qquad C = \frac{(2^2)^3\times 10\times 4^{-2}}{15\times 8}$$
2. Soient n un entier naturel non nul et a un réel non nul. Montrer l'égalité suivante :
$$\frac{(-1)^n}{n}\times\left(\frac{1}{a}-1\right)^n = \frac{(a-1)^n}{na^n}.$$
3. Pour n un entier naturel, on note $u_n = (-3)^n+2\times 3^{n+1}-4\times 3^n$. En factorisant l'expression, montrer que u_n vaut 3^n lorsque n est impair et vaut 3^{n+1} lorsque n est pair.

Exercice 20 – Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par
$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad f(x) = 2\sin(x)+\sin(2x)$$

1. Étudier la parité et vérifier que f est périodique. En déduire un intervalle $\mathscr{D}$ suffisant pour étudier f.
2. Étudier les variations de f sur $\mathscr{D}$.
3. Représenter f sur un intervalle de longueur trois périodes.
4. Résoudre l'équation $f(x)=0$ d'inconnue $x\in[-\pi,\pi]$.

Exercice 21 – Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est paire, alors $g\circ f$ est paire.
2. Montrer que si f est impaire et g est impaire, alors $g\circ f$ est impaire.
3. Si f est impaire et g est paire, quelle est la parité de $g\circ f$?

Exercice 22 – On considère le polynôme P, défini par,
$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad P(x) = x^3+3x+4$$

1. Montrer que $P(-1)=0$.
2. Déterminer le polynôme $Q\in\mathbb{R}[x]$ tel que
$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad P(x) = (x+1)Q(x).$$
3. Déterminer les racines éventuelles du polynôme Q.
4. En déduire le tableau de signe du polynôme Q.
5. En déduire le tableau de signe du polynôme P.

On considère maintenant la fonction f donnée par
$$f : x\mapsto \frac{x^3-2}{x^2+1}$$

6. Donner l'ensemble de définition de la fonction f. *Justifier.*
7. Montrer que la fonction f est ni paire, ni impaire.
8. Déterminer la dérivée de f et montrer que
$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{xP(x)}{(x^2+1)^2}$$
9. À l'aide des questions précédentes, dresser le tableau de variations de la fonction f. *Les limites ne sont pas demandées.*
10. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1. *On rappelle que l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est donnée par*
$$y = f'(a)(x-a)+f(a).$$
11. En quel·s point·s, la courbe représentative de la fonction f admet-elle une tangente horizontale ?
12. Résoudre l'inéquation $f(x)\geqslant x$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.
13. Représenter l'allure de la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 23 – Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction. Montrer que f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 24 – Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f\circ f = \mathrm{id}$. Montrer que $f=\mathrm{id}$.

Exercice 25 – Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique et monotone sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.