Interrogation du 14/10/2025

NOM Prénom :

1. Donner la **forme algébrique** des nombres complexes suivants.

   a) $e^{i\pi}$ b) $e^{-i\frac{\pi}{2}}$ c) $2e^{i\frac{\pi}{4}}$

   En utilisant le fait que

   $$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

   on obtient les résultats suivants.

   a) On a,

   $$\boxed{e^{i\pi}} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + i \times 0 \boxed{= -1}$$

   b) On a,

   $$\boxed{e^{-i\frac{\pi}{2}}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i \times (-1) \boxed{= -i}$$

   c) On a,

   $$\boxed{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \boxed{= \sqrt{2} + i\sqrt{2}}$$

2. Donner la **forme trigonométrique** des nombres complexes suivants. En déduire la valeur du **module** et d'un **argument** pour chacun des nombres complexes.

   a) $1 + i\sqrt{3}$ b) $3i$

   a) On peut commencer par calculer que

   $$\boxed{|1 + i\sqrt{3}|} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \boxed{= 2}$$

   Ainsi, on obtient que

   $$\boxed{1 + i\sqrt{3}} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \boxed{= 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

   D'où

   $$\boxed{\arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}}$$

   b) On peut remarquer directement que

   $$\boxed{3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

   Donc,

   $$\boxed{|3i| = 3} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\arg(3i) = \frac{\pi}{2}}$$

Tournez la page ➔

3. Démontrer la formule de **linéarisation** suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^3(x) = \frac{1}{4}\left[\cos(3x) + 3\cos(x)\right]$$

On détaillera bien tous les calculs.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\cos^3(x)} &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 && \textit{[Formules d'Euler vers les exponentielles]} \\
&= \frac{1}{8}\left[(e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2 e^{-ix} + 3e^{ix}(e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3\right] && \textit{[Binôme de Newton]} \\
&= \frac{1}{8}\left[e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}\right] && \textit{[Simplifications]} \\
&= \frac{1}{8}\left[e^{i3x} + e^{-i3x} + 3(e^{ix} + e^{-ix})\right] && \textit{[Regroupement des termes conjugués]} \\
&= \frac{1}{8}\left[2\cos(3x) + 6\cos(x)\right] && \textit{[Formules d'Euler vers les } \cos \textit{ et } \sin\textit{]} \\
&\boxed{= \frac{1}{4}\left[\cos(3x) + 3\cos(x)\right]}
\end{aligned}$$