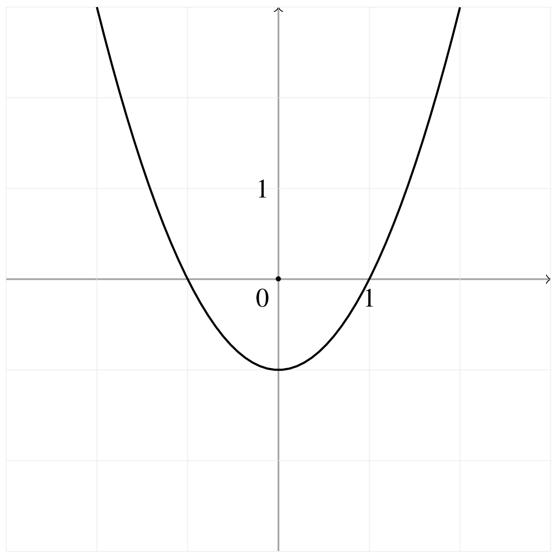
DM 1

À rendre pour le lundi 6 octobre (facultatif)

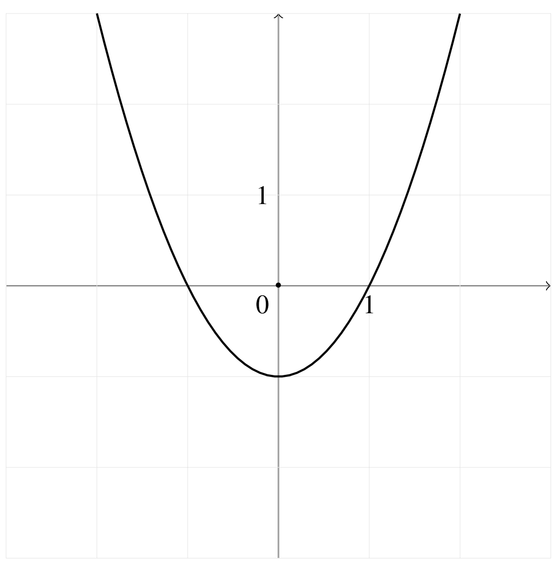
Exercice 1 – Fonction bijective. On considère dans cet exercice la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 - 1$$

1. À l'aide du graphe ci-dessous, justifier que la fonction f n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $[-1, +\infty[$ *On placera l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée sur le graphe, et on rajoutera les constructions nécessaires à la résolution de cette question. Ce schéma doit s'accompagner d'une phrase ou deux d'explications.*



2. À l'aide du graphe ci-dessous, justifier que la fonction f n'est pas bijective de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ *On placera l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée sur le graphe, et on rajoutera les constructions nécessaires à la résolution de cette question. Ce schéma doit s'accompagner d'une phrase ou deux d'explications.*



3. Montrer que la fonction f est bijective de $[0, +\infty[$ dans $[-1, +\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 2 – Nombres complexes. Dans cet exercice, on souhaite résoudre deux équations polynomiales.

Partie 1. Une équation de degré 2.

1. ✎ Déterminer les racines carrées du nombre complexe $12+16i$.
2. ✎ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2+(6-2i)z+(5-10i)=0$$
On notera z_1 et z_2 les solutions obtenues.
3. Vérifier que les résultats trouvés à la question précédente sont bien cohérents avec les relations coefficients-racines.

Partie 2. Une équation de degré 3. On cherche maintenant à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$\text{(E)} \qquad z^3+(6-7i)z^2-(5+40i)z-(50+25i)=0$$

On pose
$$\forall z\in\mathbb{C}, \qquad P(z)=z^3+(6-7i)z^2-(5+40i)z-(50+25i)$$
Soit b un nombre réel.

4. ✎ Écrire sous forme algébrique les deux nombres complexes $(ib)^2$ et $(ib)^3$. Préciser si ce sont des nombres réels ou imaginaires purs.
5. Montrer que $P(ib)=0$ si et seulement si b est une solution (réelle) de deux équations polynomiales à coefficients réels.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-3x^2+20x-25=0$. On note $b_0\in\mathbb{Z}$ la solution entière obtenue.
7. Avec ce qui précède, justifier que ib_0 est une racine de P.
8. Déterminer les trois nombres complexes a, b et c tels que
$$\forall z\in\mathbb{C}, \qquad P(z)=(z-ib_0)(az^2+bz+c).$$
9. En déduire les solutions de l'équation (E).
10. Démontrer que deux des solutions de (E) appartiennent à un même cercle de centre (0,0) mais pas la troisième.