

DM 2

À rendre pour le mardi 4 novembre (facultatif)

Exercice 1 – QCM sur les nombres complexes. Pour chaque question, sélectionner la(les) bonne(s) réponse(s) en **justifiant votre réponse**.

1. Le nombre complexe $\frac{i-1}{i+1}$ vaut

a) $(i-1)^2$

c) i

b) $1^2 - i^2$

d) $2i$
2. Les racines du polynôme $x \mapsto x^2 - 2\cos(\theta)x + 1$ sont

a) imaginaires pures

c) $e^{i\theta}$ et $\frac{1}{e^{i\theta}}$

b) $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$

d) $\cos \theta$ et $\sin \theta$
3. Si $\omega \in \mathbb{U}_n$ alors

a) $\omega^3 \in \mathbb{U}_{3n}$

c) $\omega^3 \in \mathbb{U}_{\frac{n}{3}}$ si n est un multiple de 3

b) $\omega^3 \in \mathbb{U}_n$

d) $\omega^3 = 1$
4. L'ensemble des nombres complexes z tels que $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$ est décrit par l'équation

a) $|z+1| = |z-i|$

c) $|z+1| = |z+i|$

b) $|z-1| = |z-i|$

d) $|z-1| = |z+i|$

Exercice 2 – Nombres complexes. On considère les nombres complexes

$$z_1 = 1 + i \quad z_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + i\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad Z = z_1 z_2$$

1. Donner la forme algébrique de Z .
2. Déterminer une forme trigonométrique pour chacun des complexes z_1, z_2 et Z .
3. En utilisant les deux manières d'écrire le nombre complexes Z , en déduire les valeurs de

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

4. En déduire qu'il existe A et φ deux réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \cos(x) - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \sin(x) = A \cos(x - \varphi)$$

5. En déduire les solutions de l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \cos(x) - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \sin(x) = \frac{\sqrt{12}}{4}$$

6. Préciser les solutions qui sont dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ et les représenter sur le cercle trigonométrique.

Exercice 3 – Calcul d'une somme. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n (k \times k!)$.

1. Calculer S_1, S_2 et S_3 .
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$k \times k! = (k+1)! - k!$$

3. En déduire l'expression de S_n en fonction de n .
4. Vérifier que la formule donnée en Question 3 coïncide avec les résultats de la Question 1.