DS 1

Samedi 20 septembre, de 8h à 10h

Les règles à respecter sont les suivantes.

① *Aucun document n'est autorisé.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***

② *Les candidat·e·s sont invité·e·s à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible leurs résultats.*

③ *Pour augmenter la* ***lisibilité*** *des calculs, dans la mesure du possible, les égalités successives seront présentées en colonne (et non pas en ligne) avec les différents symboles = bien alignés.*

④ *Les* ***pages*** *doivent être* ***numérotées*** *en indiquant le nombre de pages total (par exemple, 1/12, 2/12, ect.)*

⑤ *L'usage du blanco, souris, effaceurs et stylos frixion interdit : il faut* ***rayer proprement*** *(à la règle) en cas d'erreur.*

Exercice 1 – Questions de cours. *Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Pour chacune des fonctions usuelles suivantes :

   a) $x \mapsto \exp(x)$ b) $x \mapsto \ln(x)$ c) $x \mapsto x^2$ d) $x \mapsto \sqrt{x}$

   donner les informations suivantes. *Aucune justification n'est demandée.*
   - Donner l'ensemble de définition de la fonction.
   - Tracer l'allure de sa courbe.
   - Donner la dérivée de la fonction.
   - Dire si la fonction est paire/impaire/ni l'un ni l'autre.
   - Dire si la fonction admet des majorants/minorants et si oui, préciser leurs valeurs.
2. Soient $x, a, b \in \mathbb{R}$. Recopier sur votre copie et compléter les formules de trigonométrie suivantes. *Aucune justification n'est demandée.*

   a) $\cos(x+\pi) = \dots$ b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dots$

   c) $\sin(a+b) = \dots$ d) $\cos(a)\cos(b) = \dots$

Exercice 2 – Étude d'une fonction. On considère la fonction f définie par,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \sin(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les valeurs des images de 0, $\dfrac{2\pi}{3}$ et π par f.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f est 2π-périodique.
4. Justifier qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $I = [0, \pi]$ pour connaître le comportement de f sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que,
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 2\cos^2(x) - \cos(x) - 1$$
6. Résoudre l'équation $2x^2 - x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
7. Justifier que
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad 2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$$
8. En déduire le tableau de signe du polynôme $x \mapsto 2x^2 - x - 1$.
9. Résoudre sur $[0, \pi]$ l'inéquation $2\cos(x) + 1 \geq 0$.
10. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.
11. Donner les équations des tangentes de f en 0 et en π. *On rappelle que l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.*
12. Tracer l'allure de la représentation graphique de f sur $\mathbb{R}$. *On fera apparaître les propriétés précédemment démontrées.*
13. La fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ?

Exercice 3 – Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Le but principal de cet exercice est de calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ de trois manières différentes.

1. **Méthode 1.**
   (a) Soient a et b dans $\mathbb{R}$. Écrire $\cos(a-b)$ en fonction de $\cos(a), \cos(b), \sin(a)$ et $\sin(b)$.
   (b) En prenant $a = \frac{\pi}{3}$ et une valeur de b bien choisie, déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. **Méthode 2.**
   (a) Montrer que,
   $$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x).$$
   (b) En déduire que $s = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est une solution de l'équation
   $$\text{(E)} \qquad 4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$
   (c) Dans cette question, on cherche à résoudre l'équation (E).
      i. Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une solution de (E).
      ii. Montrer que
      $$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad 4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(4x^2 + 2\sqrt{2}x - 1)$$
      iii. En déduire toutes les solutions de (E).
   (d) En déduire la valeur de $s = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
   (e) Retrouver alors que
   $$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
3. **Méthode 3.**
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire $\sin(4x) + \sin(2x)$ comme un produit de cosinus et sinus.
   (b) En déduire à nouveau la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
4. Calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{2024\pi}{12}\right)$.

Exercice 4 – Bonus (hors barême). Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.