

DS 1

Samedi 20 septembre, de 8h à 10h

Exercice 1 – Questions de cours. Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Pour chaque des fonctions usuelles suivantes :

a) $x \mapsto \exp(x)$ b) $x \mapsto \ln(x)$ c) $x \mapsto x^2$ d) $x \mapsto \sqrt{x}$

donner les informations suivantes. *Aucune justification n'est demandée.*

- Donner l'ensemble de définition de la fonction.
- Tracer l'allure de sa courbe.
- Donner la dérivée de la fonction.
- Dire si la fonction est paire/impaire/ni l'un ni l'autre.
- Dire si la fonction admet des majorants/majorants et si oui, préciser leurs valeurs.

Fonction	Ens. de def.	Dérivée	Parité/impairité	Majorant/minorant
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$	Ni paire, ni impaire	Minorée par 0, pas de majorant
$x \mapsto \ln(x)$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	Ni paire, ni impaire	Pas minorée, pas de majorant
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 2x$	Paire	Minorée par 0, pas de majorant
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	Ni paire, ni impaire	Minorée par 0, pas de majorant

2. Soient $x, a, b \in \mathbb{R}$. Recopier sur votre copie et compléter les formules de trigonométrie suivantes. *Aucune justification n'est demandée.*

- a) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
- b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- c) $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- d) $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b))$

Exercice 2 – Étude d’une fonction. On considère la fonction f définie,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) - \sin(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les valeurs exactes des images de 0 , $\frac{2\pi}{3}$ et π par f .

On a,

$$\boxed{f(0)} = \frac{1}{2} \sin(0) - \sin(0) \boxed{= 0}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \boxed{f\left(\frac{2\pi}{3}\right)} &= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{3}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\boxed{= -\frac{3\sqrt{3}}{4}}. \end{aligned}$$

Et enfin, on a,

$$\boxed{f(\pi)} = \frac{1}{2} \sin(2\pi) - \sin(\pi) = \frac{1}{2} \times 0 - 0 \boxed{= 0}$$

2. Montrer que f est impaire.

Tout d’abord, l’ensemble de définition de f , $\mathbb{R}$, est symétrique par rapport à 0 .
Puis, en utilisant l’imparité de la fonction sinus, on obtient,

$$\begin{aligned} \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) &= \frac{1}{2} \sin(-2x) - \sin(-x) \\ &= -\frac{1}{2} \sin(2x) + \sin(x) \\ &= -\left(\frac{1}{2} \sin(2x) - \sin(x)\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

La fonction f est donc impaire sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est 2π -périodique.

En utilisant la 2π -périodicité de la fonction sinus, on obtient,

$$\begin{aligned} \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(x+2\pi) &= \frac{1}{2} \sin(2(x+2\pi)) - \sin(x+2\pi) \\ &= \frac{1}{2} \sin(2x+2 \times 2\pi) - \sin(x) \\ &= \frac{1}{2} \sin(2x) - \sin(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

La fonction f est donc 2π -périodique.

4. Justifier qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $I = [0, \pi]$ pour connaître le comportement de f sur $\mathbb{R}$.

Par 2π -périodicité, on peut étudier la fonction f sur tout intervalle de longueur 2π , en particulier $[-\pi, \pi]$. Comme f est également impaire, on peut restreindre cet intervalle à $[0, \pi]$. On peut donc se contenter d'étudier f sur l'intervalle $[0, \pi]$.

5. Démontrer que,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\cos^2(x) - \cos(x) - 1$$

La fonction f est dérivable comme somme de fonctions qui le sont et,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{2} \times 2\cos(2x) - \cos(x) = \cos(2x) - \cos(x)$$

Or, d'après la formule de duplication,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

Ainsi, on obtient que,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\cos^2(x) - \cos(x) - 1$$

6. Résoudre l'équation $2x^2 - x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On est face à une **équation de second degré**. On commence donc par calculer son discriminant qui vaut

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 > 0$$

L'équation admet donc deux solutions réelles données par

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{9}}{2 \times 2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$$

7. Justifier que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad 2x^2 - x - 1 = (x - 1)(2x + 1)$$

- **Première méthode.** Soit $x \in \mathbb{R}$. En développant, on a,

$$(x - 1)(2x + 1) = 2x^2 + x - 2x - 1 = 2x^2 - x - 1$$

- **Deuxième méthode.** On sait, d'après la question précédente, que le polynôme $x \mapsto 2x^2 - x - 1$ admet deux racines réelles, qui valent 1 et $-\frac{1}{2}$. Ainsi, ce polynôme admet une **factorisation** sous la forme

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad 2x^2 - x - 1 = 2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 1)(2x + 1)$$

8. En déduire le tableau de signe du polynôme $x \mapsto 2x^2 - x - 1$.

En utilisant la factorisation de la question précédente, on peut en déduire le signe de la fonction $x \mapsto 2x^2 - x - 1$ de la manière suivante.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$2x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$2x^2 - x - 1 = (x - 1)(2x + 1)$	$+$	0	$-$	$+$

9. Résoudre sur $[0, \pi]$ l'inéquation $2\cos(x) + 1 \geq 0$.

Soit $x \in [0, \pi]$. On a

$$\begin{aligned}
 2\cos(x) + 1 \geq 0 &\iff \cos(x) \geq -\frac{1}{2} \\
 &\iff 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \quad (\text{par résolution graphique})
 \end{aligned}$$

(On ne «sélectionne» que ces solutions là car on a restreint la résolution de l'inéquation à l'ensemble $[0, \pi]$.) L'ensemble des solutions de l'inéquation $2\cos(x) + 1 \geq 0$ est donc

$$\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$$

10. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.

Soit $x \in [0, \pi]$. On a

$$\begin{aligned}
 f'(x) \geq 0 &\iff 2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 \geq 0 \\
 &\iff \underbrace{(\cos(x) - 1)}_{\leq 0} (2\cos(x) + 1) \geq 0 \quad \text{d'après la quest. 7 avec } X = \cos(x) \\
 &\iff 2\cos(x) + 1 \leq 0 \\
 &\iff x \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \text{ d'après la question 9.}
 \end{aligned}$$

On en déduit donc le tableau de variations suivant:

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

11. Donner les équations des tangentes de f en 0 et en π . On rappelle que l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

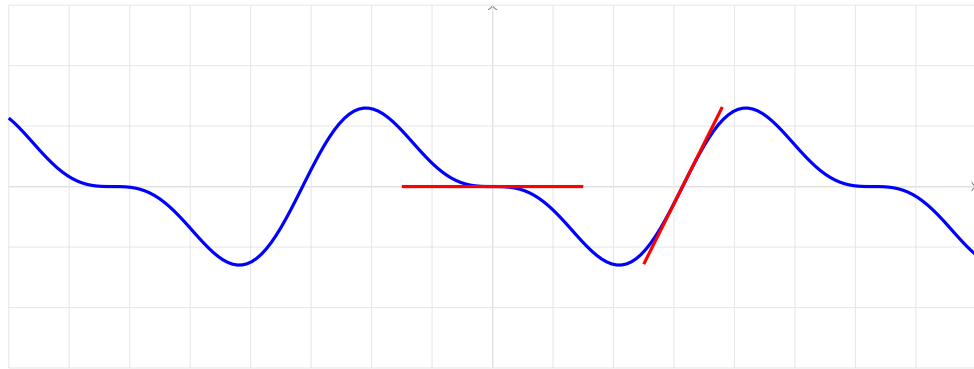
- On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2\cos^2(0) - \cos(0) - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$. L'équation de la tangente de f en 0 est donc

$$y = 0$$

- On a $f(\pi) = 0$ et $f'(\pi) = 2\cos^2(\pi) - \cos(\pi) - 1 = 2(-1)^2 + 1 - 1 = 2$. L'équation de la tangente de f en π est donc

$$y = 2(x - \pi)$$

12. Tracer l'allure de la représentation graphique de f sur $\mathbb{R}$. On fera apparaître les propriétés précédemment démontrées.



13. La fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ?

- La fonction admet un qui vaut , atteint en (et tous ses multiples de 2π).
- La fonction admet un qui vaut , atteint en (et tous ses multiples de 2π).

Exercice 3 – Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Le but principal de cet exercice est de calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ de trois manières différentes.

1. Méthode 1.

(a) Soient a et b dans $\mathbb{R}$. Écrire $\cos(a-b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$.

Soient a et b dans $\mathbb{R}$. D'après la **formule d'addition**, on a,

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

(b) En prenant $a = \frac{\pi}{3}$ et une valeur de b bien choisie, déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

En remarquant que

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

et en utilisant la formule d'addition donnée à la question précédente, on obtient que,

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

2. Méthode 2.

(a) Montrer que,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la **formule d'addition** puis les **formules de duplication** et enfin la **relation fondamentale**, on obtient,

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x+x) \\ &= \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x) \\ &= 2\sin(x)\cos(x)\cos(x) + \sin(x)(1-2\sin^2(x)) \\ &= 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x) - 2\sin^3(x) \\ &= 2\sin(x)(1-\sin^2(x)) + \sin(x) - 2\sin^3(x) \\ &= 2\sin(x) - 2\sin^3(x) + \sin(x) - 2\sin^3(x) \\ &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x) \end{aligned}$$

(b) En déduire que $s = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est une solution de l'équation

$$(E) \quad 4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

En utilisant la formule précédente avec $x = \frac{\pi}{12}$, et en notant $s = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, on obtient

$$\sin\left(3 \times \frac{\pi}{12}\right) = 3s - 4s^3$$

Or $\sin\left(3 \times \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi, on obtient,

$$3s - 4s^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c'est-à-dire

$$4s^3 - 3s + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Ainsi, $s = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est une solution de l'équation (E).

(c) Dans cette question, on cherche à résoudre l'équation (E).

i. Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une solution de (E).

On peut calculer directement que

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} &= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 4 \times \frac{2}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une solution de (E).

ii. Montrer que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad 4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(4x^2 + 2\sqrt{2}x - 1)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. En développant, on obtient que,

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(4x^2 + 2\sqrt{2}x - 1) &= 4x^3 + \cancel{2\sqrt{2}x^2} - x - \cancel{2\sqrt{2}x^2} - 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

iii. En déduire toutes les solutions de (E).

Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la question précédente, on obtient,

$$\begin{aligned} 4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 &\iff \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(4x^2 + 2\sqrt{2}x - 1) = 0 \\ &\iff x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \text{ ou } 4x^2 + 2\sqrt{2}x - 1 = 0 \\ &\iff x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } 4x^2 + 2\sqrt{2}x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Or l'équation $4x^2 + 2\sqrt{2}x - 1 = 0$ est une équation de second degré dont le discriminant vaut $\Delta = 24 > 0$. Ainsi, cette équation admet deux solutions réelles données par

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{2 \times 4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ ou } x_2 = \frac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{2 \times 4} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

(pour ce calcul, on a utilisé le fait que $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$.)
Ainsi, en reprenant notre équivalence, on obtient,

$$4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \iff x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } 4x^2 + 2\sqrt{2}x - 1 = 0$$

$$\iff x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Ainsi, l'équation (E) admet trois solutions réelles, données par

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

(d) En déduire la valeur de $s = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

D'après la question 2b, la quantité $s = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est une solution de (E). Ainsi, d'après la question 2(c)iii,

$$s = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } s = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ ou } s = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Or, on remarque que

$$0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{4}$$

Donc, par stricte croissance du sinus sur $[-\pi, \pi]$, on obtient que

$$\sin(0) < \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) < \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

c'est-à-dire

$$0 < \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi, nécessairement,

$$s = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(e) Retrouver alors que

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

En utilisant la **relation fondamentale**, on a,

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) &= 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 && \text{grâce à la question 2d} \\ &= 1 - \frac{6 - 2\sqrt{12} + 2}{16} \\ &= \frac{8 - 2\sqrt{4 \times 3}}{16} \\ &= \frac{8 - 2 \times 2 \times \sqrt{3}}{16} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

Or, $\frac{\pi}{12} \in [-\pi, \pi]$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$. Ainsi, on en déduit que

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Pour retrouver la valeur de la question **1b**, on peut remarquer que

$$\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 2 + \sqrt{3}$$

Donc,

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

Ainsi,

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

3. Méthode 3.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire $\sin(4x) + \sin(2x)$ comme un produit de cosinus et sinus.

Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide la **formule de factorisation**, on obtient,

$$\begin{aligned}\sin(4x) + \sin(2x) &= 2 \sin\left(\frac{4x+2x}{2}\right) \cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right) \\ &= 2 \sin(3x) \cos(x)\end{aligned}$$

(b) En déduire à nouveau la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

En prenant $x = \frac{\pi}{12}$ dans la formule précédente, on obtient,

$$\sin\left(4 \times \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) = 2 \sin\left(3 \times \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

c'est-à-dire

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Finalement, on obtient,

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

4. Calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{2024\pi}{12}\right)$.

• On peut observer que

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$$

Ainsi, en utilisant les **symétries**, on obtient,

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

grâce à la question **2d**.

- On peut observer que

$$\frac{2024\pi}{12} = 84 \times 2\pi + \frac{2\pi}{3}$$

Ainsi, par 2π -périodicité du cosinus, on obtient,

$$\boxed{\cos\left(\frac{2024\pi}{12}\right)} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \boxed{= -\frac{1}{2}}$$