

9. Calcul d'une primitive

Pour bien démarrer : savoir «remonter» l'opération de dérivation

$\mathcal{D}_f$	Fonction f	$\mathcal{D}_{f'}$	Dérivée f'
			$x \mapsto 0$
			$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
			$x \mapsto \frac{1}{x}$
			$x \mapsto e^x$
			$x \mapsto -\sin(x)$
			$x \mapsto \cos(x)$
			$x \mapsto 1 + \tan^2(x)$ ou $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$
			$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
			$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
			$x \mapsto \text{sh}(x)$
			$x \mapsto \text{ch}(x)$

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définition de la notion de primitive

Définition 1.1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On dit que $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si

- ① F est dérivable sur I
- ② Pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$

Exemple 1.2 Montrons que la fonction $F : x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Exemple 1.3 Montrons que les fonctions $F_1 : x \mapsto x^2$ et $F_2 : x \mapsto x^2 + 1$ sont des primitives de la fonction $f : x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.

2 Existence et non unicité

Proposition 2.1 — Existence d'une primitive. Toute fonction **continue** sur un **intervalle** admet au moins une **primitive** sur cet intervalle.



Il faut se placer sur un intervalle (un ensemble de $\mathbb{R}$ «sans trou») pour éviter les problèmes. En effet, si on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ (qui n'est donc pas un intervalle) par,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{1}{x},$$

alors,

- sur $]0, +\infty[$, f admet pour primitive
- sur $] -\infty, 0[$, f admet pour primitive

Grâce à l'Exemple 1.3, on remarque qu'une même fonction peut admettre plusieurs primitives. Toutefois, ces primitives ne diffèrent que d'une constante. Ainsi, on ne dit jamais «la primitive» mais toujours «une primitive» car il en existe une *infinité* (il suffit d'ajouter une constante pour obtenir une nouvelle primitive).

Proposition 2.2 — Infinité de primitives. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

- Deux primitives F_1 et F_2 de f sur I sont égales à une **constante près**,

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, F_1(x) = F_2(x) + c.$$

- Autrement dit, si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est donné par

$$\{x \mapsto F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple 2.3 L'ensemble des primitives de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ est donné par

Proposition 2.4 — Unicité sous condition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. Alors, pour tous $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant $F(x_0) = y_0$.

Exercice 2.5 Donner l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

Exercice 2.6 On admet que la fonction $F : x \mapsto \frac{x}{3} + \frac{2}{9} \ln(-3x + 2)$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{3x-2}$ sur $I =]-\infty, \frac{2}{3}[$. En déduire la primitive de f sur I qui s'annule en 0.

3 Calcul de primitive

3.1 Primitives des fonctions usuelles

On ne précise pas ici l'ensemble de définition de la fonction, ni de sa primitive.

Fonction	Une primitive	Fonction	Une primitive
$x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \neq 0$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x \mapsto \operatorname{ch}(x)$	$x \mapsto \operatorname{sh}(x)$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \exp(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{a} \exp(ax)$	$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto x \ln(x) - x$
$x \mapsto \cos(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax)$	$x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \sin(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{a} \cos(ax)$	$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto -\ln(\cos(x))$
$x \mapsto \operatorname{sh}(x)$	$x \mapsto \operatorname{ch}(x)$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arcsin(x)$

Exemple 3.1

Fonction	Une primitive	Valable sur	Fonction	Une primitive	Valable sur
$x \mapsto 1$			$x \mapsto \sin(2x)$		
$x \mapsto \cos(x)$			$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$		
$x \mapsto x^2$			$x \mapsto e^x$		
$x \mapsto \frac{1}{x}$			$x \mapsto e^{2x}$		
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$			$x \mapsto \operatorname{ch}(x)$		

Proposition 3.2 Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $F, G : I \rightarrow \mathbb{K}$ telles que F soit une primitive de f sur I et G soit une primitive de g sur I . Alors, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $aF + bG$ est une primitive de $af + bg$ sur I .

Grâce à la *linéarité* de la notion de primitive et à partir des primitives des fonctions usuelles, on peut alors trouver des primitives de fonctions plus compliquées.

Exemple 3.3

Fonction	<u>Une</u> primitive	Valable sur
$x \mapsto \operatorname{ch}(x) - 5$		
$x \mapsto 3x^2 - 5x + 3$		
$x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$		
$x \mapsto e^{2x} - 4e^{-2x}$		
$x \mapsto \cos(3x) + \frac{1}{1+x^2}$		
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$		

3.2 Reconnaître la dérivée d'une composée

Proposition 3.4 Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $u : I \rightarrow J$ une fonction dérivable sur I et $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur J , dont une primitive est notée F . Alors une primitive de $x \mapsto u'(x)f(u(x))$ sur I est $x \mapsto F(u(x))$.

Les formes les plus courantes de dérivées de composées sont les suivantes.

Fonction	<u>Une</u> primitive
$u' \exp(u)$	$\exp(u)$
$u' u^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$

Fonction	<u>Une</u> primitive
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$



On ne sait pas primitiver directement des fonctions de la forme $x \mapsto [u(x)]^n$, $x \mapsto \exp(u(x))$, etc. Il nous faut le «terme dérivé $u'(x)$ » en facteur de ces quantités. Parfois, on est amené à forcer son apparition.

Exemple 3.5

Fonction	Forme	<u>Une primitive</u>	Valable sur
$x \mapsto 2x \exp(x^2)$			
$x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$			
$x \mapsto 3(3x-5)^4$			

Fonction	«Forçage»	Forme	<u>Une primitive</u>	Valable sur
$x \mapsto \frac{1}{1+(2x)^2}$				
$x \mapsto \frac{1}{3x+1}$				
$x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$				

3.3 Primitive d'une fraction rationnelle simple

Pour déterminer la primitive d'une fonction rationnelle de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

il faut commencer par factoriser le dénominateur, qui est un polynôme du second degré. Cette factorisation dépend du signe du discriminant Δ du polynôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

a) Cas $\Delta = 0$ (le dénominateur admet une racine double)

Lorsque $\Delta = 0$, le polynôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ admet une unique racine que l'on peut noter x_0 . Dans ce cas là, le polynôme peut se factoriser sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

Alors, la fraction rationnelle peut se mettre sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\}, \quad \frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a(x - x_0)^2}$$

On peut primitiver directement sur $] -\infty, x_0[$ et sur $]x_0, +\infty[$ en reconnaissant une forme composée usuelle :

$$\frac{u'}{u^2} = u' u^{-2} \xrightarrow{\text{prim.}} -\frac{1}{u}$$

Exemple 3.6 Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{4x^2 + 4x + 1}$ sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$.

b) Cas $\Delta > 0$ (le dénominateur admet deux racines réelles distinctes)

Lorsque $\Delta > 0$, le polynôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ admet deux racines réelles distinctes que l'on peut noter x_1 et x_2 . Dans ce cas là, le polynôme peut se factoriser sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Alors, la fraction rationnelle peut se mettre sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{x_1\}, \quad \frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Pour primitiver une telle fonction, il faut effectuer une *décomposition en éléments simples*. On trouve deux réels λ_1 et λ_2 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{x_1, x_2\}, \quad \frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{\lambda_1}{x - x_1} + \frac{\lambda_2}{x - x_2}$$

On peut primitiver directement sur $] -\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$ et sur $]x_2, +\infty[$ en reconnaissant une somme de deux formes composées usuelles :

$$\frac{u'}{u} \xrightarrow{\text{prim.}} \ln(|u|)$$

Exemple 3.7 Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ sur $] -1, 1[$.

c) Cas $\Delta < 0$ (le dénominateur n'admet pas de racines réelles)

Lorsque $\Delta < 0$, le polynôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ n'admet pas de racines réelles (mais admet deux racines complexes) Dans ce cas là, le polynôme peut se mettre sous la forme canonique

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + d$$

Alors, la fraction rationnelle peut se mettre sous la forme

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + d}}$$

À quelques changements près, on peut se reconnaître une forme composée usuelle

$$\boxed{\frac{u'}{1+u^2} \xrightarrow{\text{prim.}} \arctan(u)}$$

Exemple 3.8 Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$ sur $\mathbb{R}$.

3.4 Primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$

Pour primitiver une fonction de la forme $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$, on remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{ax} \cos(bx) = \operatorname{Re} \left(e^{(a+ib)x} \right)$$

Puis, on calcule une primitive de la fonction exponentielle (complexe) et on en prend sa partie réelle.

Exemple 3.9 Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto e^x \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Pour primitiver une fonction de la forme $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$, on remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{ax} \sin(bx) = \operatorname{Im} \left(e^{(a+ib)x} \right)$$

Puis, on calcule une primitive de la fonction exponentielle (complexe) et on en prend sa partie imaginaire.