

TD 09 – Calcul d'une primitive

Exercice 1 – Primitive des fonctions usuelles. Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes en précisant les intervalles de validité.

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1. $x \mapsto 5$ | 7. $x \mapsto 2x$ |
| 2. $x \mapsto 3x^2$ | 8. $x \mapsto \frac{1}{x^4}$ |
| 3. $x \mapsto \frac{1}{x}$ | 9. $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| 4. $x \mapsto e^x$ | 10. $x \mapsto \cos(2x)$ |
| 5. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | 11. $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$ |
| 6. $x \mapsto \sin\left(\frac{x}{3}\right)$ | 12. $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ |

Exercice 2 – Primitive de sommes de fonctions usuelles. Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes en précisant les intervalles de validité.

- | | |
|--|--|
| 1. $x \mapsto x^2 - 3x + 5$ | 7. $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ |
| 2. $x \mapsto 1 + \tan^2(x) + e^{2x}$ | 8. $x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$ |
| 3. $x \mapsto \sin(2x) + 1$ | 9. $x \mapsto \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$ |
| 4. $x \mapsto e^{-3x} + x^3$ | 10. $x \mapsto \frac{1}{e^{2x}}$ |
| 5. $x \mapsto -e^{-x} + 2\operatorname{ch}(x)$ | 11. $x \mapsto \frac{1}{x} + x^2$ |
| 6. $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$ | 12. $x \mapsto 2\cos(2x) + \sin(x)$ |

Exercice 3 – Primitive des formes usuelles (sans forçage). Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes en précisant les intervalles de validité.

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $x \mapsto 2x\cos(x^2)$ | 5. $x \mapsto -\sin(x)\exp(\cos(x))$ |
| 2. $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ | 6. $x \mapsto \frac{2x}{1+x^4}$ |
| 3. $x \mapsto (x+1)^4$ | 7. $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ |
| 4. $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ | 8. $x \mapsto \cos(x)\sin^2(x)$ |

Exercice 4 – Donner l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^3}{(x^4 + 1)^3}$$

Exercice 5 – Primitive des formes usuelles (avec forçage). Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes en précisant les intervalles de validité.

- | | |
|---|------------------------------------|
| 1. $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$ | 7. $x \mapsto \frac{x}{x-4}$ |
| 2. $x \mapsto x\cos(x^2)$ | 8. $x \mapsto (x+1)e^{x^2+2x}$ |
| 3. $x \mapsto \frac{1}{x} \times \ln(x)$ | 9. $x \mapsto (2x^2 - 3)^2$ |
| 4. $x \mapsto \frac{x^2}{x^3 + 1}$ | 10. $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^3}$ |
| 5. $x \mapsto \frac{e^x}{1 - e^x}$ | 11. $x \mapsto \frac{1}{1+4x^2}$ |
| 6. $x \mapsto \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+3}}$ | 12. $x \mapsto \frac{\ln(x)^2}{x}$ |

Exercice 6 – Primitive avec condition. Dans chaque cas, donner l'unique primitive F de f sur l'intervalle donné telle que $F(x_0) = y_0$.

- $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 7$ avec $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$ sur $\mathbb{R}$.
- $f : x \mapsto \frac{1}{2}e^{3x} + 2x^4 - 1$ avec $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$ sur $\mathbb{R}$.
- $f : x \mapsto e^{-x} + \frac{2}{x}$ avec $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7 – Primitive avec condition. Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ s'annulant en π des fonctions suivantes :

- $x \mapsto \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$
- $x \mapsto \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$
- $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

Exercice 8 – Produit exponentielle avec cos/sin. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes.

- | | |
|-----------------------------|--------------------------------|
| 1. $x \mapsto e^x \cos(3x)$ | 2. $x \mapsto e^{2x} \sin(3x)$ |
|-----------------------------|--------------------------------|

Exercice 9 – Primitive avec décomposition en éléments simples. On considère la fonction f définie sur $] -\infty, 1[$ par

$$\forall x < 1, \quad f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4x+3}$$

- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$.
- Déterminer deux réels a, b tels que :

$$\forall x \in] -\infty, 1[, \quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}.$$

- En déduire une primitive de f sur $] -\infty, 1[$.
- En déduire la primitive de f qui s'annule en 0.

Exercice 10 – Primitive avec décomposition en éléments simples. On considère la fonction g définie sur $I =]\frac{1}{2}, +\infty[$ par

$$\forall x > \frac{1}{2}, \quad g(x) = \frac{1}{4x^2 - 4x + 1}$$

1. Factoriser, pour $x \in \mathbb{R}$, $4x^2 - 4x + 1$.
2. En déduire une primitive de g sur I

Exercice 11 – Primitive et forme canonique. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

1. Mettre sous forme canonique le polynôme $x \mapsto x^2 - 2x + 2$
2. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 – Primitive avec décomposition en éléments simples. On considère la fonction f définie sur $I = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$$

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

2. En déduire une primitive de f sur $]1, +\infty[$.
3. En déduire une primitive de f sur $]0, 1[$.

Exercice 13 – Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Si f est impaire, ses primitives sont-elles impaires ? paires ?
2. Si f est paire, ses primitives sont-elles paires ? impaires ?

Exercice 14 – CCINP, MP/MPI. Déterminer une primitive de

$$x \mapsto \cos^4(x) \text{ sur } \mathbb{R}$$