TD 09 – Calcul d'une primitive

Exercice 1 –

	Fonction	Une primitive	Valable sur
1.	$x \mapsto 5$	$x \mapsto 5x$	$\mathbb{R}$
2.	$x \mapsto 3x^2$	$x \mapsto x^3$	$\mathbb{R}$
3.	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(\lvert x\rvert)$	$]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$
4.	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
5.	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arcsin(x)$	$]-1,1[$
6.	$x \mapsto \sin\left(\frac{x}{3}\right)$	$x \mapsto -3\cos\left(\frac{x}{3}\right)$	$\mathbb{R}$
7.	$x \mapsto 2x$	$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$
8.	$x \mapsto \frac{1}{x^4}$	$x \mapsto -\frac{1}{3x^3}$	$]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$
9.	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$]0,+\infty[$
10.	$x \mapsto \cos(2x)$	$x \mapsto \frac{1}{2}\sin(2x)$	$\mathbb{R}$
11.	$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
12.	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x)$	$\mathbb{R}$

Exercice 2 –

Question	Fonction	Une primitive	Valable sur
1.	$x \mapsto x^2 - 3x + 5$	$x \mapsto \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x$	$\mathbb{R}$
2.	$x \mapsto 1 + \tan^2(x) + \mathrm{e}^{2x}$	$x \mapsto \tan(x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \vert k \in \mathbb{Z}\}$
3.	$x \mapsto \sin(2x) + 1$	$x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(2x) + x$	$\mathbb{R}$
4.	$x \mapsto \mathrm{e}^{-3x} + x^3$	$x \mapsto -\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{3} + \frac{x^4}{4}$	$\mathbb{R}$
5.	$x \mapsto -\mathrm{e}^{-x} + 2\,\mathrm{ch}(x)$	$x \mapsto \mathrm{e}^{-x} + 2\,\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
6.	$x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$	$x \mapsto \ln(\vert x\vert) + \frac{1}{2x}$	$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
7.	$x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$	$x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$
8.	$x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$	$x \mapsto \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20}$	$\mathbb{R}$
9.	$x \mapsto \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}$	$x \mapsto -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3}$	$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
10.	$x \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}$	$x \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$	$\mathbb{R}$
11.	$x \mapsto \frac{1}{x} + x^2$	$x \mapsto \ln(\vert x\vert) + \frac{x^3}{3}$	$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
12.	$x \mapsto 2\cos(2x) + \sin(x)$	$x \mapsto \sin(2x) - \cos(x)$	$\mathbb{R}$

Exercice 3 –

Question	Fonction	Une primitive	Valable sur
1.	$x \mapsto 2x\cos(x^2)$	$x \mapsto \sin(x^2)$	$\mathbb{R}$
2.	$x \mapsto \frac{1}{x+1}$	$x \mapsto \ln(\lvert x+1 \rvert)$	$]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$
3.	$x \mapsto (x+1)^4$	$x \mapsto \frac{1}{5}(x+1)^5$	$\mathbb{R}$
4.	$x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$	$x \mapsto \ln(\lvert 1+x^2 \rvert)$ soit $x \mapsto \ln(1+x^2)$	$\mathbb{R}$
5.	$x \mapsto -\sin(x)\exp(\cos(x))$	$x \mapsto \exp(\cos(x))$	$\mathbb{R}$
6.	$x \mapsto \frac{2x}{1+x^4}$	$x \mapsto \arctan(x^2)$	$\mathbb{R}$
7.	$x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x+1}$	$]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$
8.	$x \mapsto \cos(x)\sin^2(x)$	$x \mapsto \frac{1}{3}\sin^3(x)$	$\mathbb{R}$

Exercice 4 – Donner l'ensemble des primitives de $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{(x^4+1)^3}$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^3}{(x^4+1)^3} = \frac{1}{4}\frac{4x^3}{(x^4+1)^3} = \frac{1}{4}\frac{u'(x)}{u(x)^3} = \frac{1}{4}u'(x)u^{-3}(x). \qquad \text{avec} \qquad u(x) = x^4+1.$$

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$x \mapsto \frac{1}{4}\frac{u(x)^{-3+1}}{-3+1} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x \mapsto -\frac{1}{8(x^4+1)^2}.$$

Donc l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$ est donné par

$$\left\{ x \mapsto -\frac{1}{8(x^4+1)^2} + c \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 5 –

Question	Fonction	Une primitive	Valable sur
1.	$x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{2(1+x^2)}$	$\mathbb{R}$
2.	$x \mapsto x\cos(x^2)$	$x \mapsto \frac{1}{2}\sin(x^2)$	$\mathbb{R}$
3.	$x \mapsto \frac{1}{x} \times \ln(x)$	$x \mapsto \frac{(\ln(x))^2}{2}$	$]0,+\infty[$
4.	$x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3+1}$	$x \mapsto \frac{1}{3}\ln(\lvert x^3+1\rvert)$	$]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$
5.	$x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}$	$x \mapsto \ln(\lvert 1-\mathrm{e}^x\rvert)$	$]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$
6.	$x \mapsto \dfrac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+3}}$	$x \mapsto 3\sqrt{x^2-4x+3}$	$]-\infty,1[$ et $]3,+\infty[$
7.	$x \mapsto \dfrac{x}{x-4}$	$x \mapsto x+4\ln(\lvert x-4\rvert)$	$]-\infty,4[$ et $]4,+\infty[$
8.	$x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{x^2+2x}$	$x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+2x}$	$\mathbb{R}$
9.	$x \mapsto (2x^2-3)^2$	$x \mapsto \frac{4}{5}x^5-4x^3+9x$	$\mathbb{R}$
10.	$x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^3}$	$x \mapsto -\frac{1}{2(x-1)^2}$	$]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$
11.	$x \mapsto \dfrac{1}{1+4x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(2x)$	$\mathbb{R}$
12.	$x \mapsto \dfrac{\ln(x)^2}{x}$	$x \mapsto \frac{(\ln(x))^3}{3}$	$]0,+\infty[$

Exercice 6 – Dans chaque cas, donner l'unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$ sur l'intervalle donné.

1. $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 7$ avec $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$ sur $\mathbb{R}$.

   Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme
   $$x \mapsto \frac{x^4}{4} - x^3 + 7x + c \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R}$$
   Ainsi, <u>la</u> primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui vaut 2 en 1 est donnée par
   $$x \mapsto \frac{x^4}{4} - x^3 + 7x - \frac{17}{4}.$$

2. $f : x \mapsto \frac{1}{2}e^{3x} + 2x^4 - 1$ avec $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$ sur $\mathbb{R}$.

   Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme
   $$x \mapsto \frac{e^{3x}}{6} + \frac{2}{5}x^5 - x + c \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R}$$
   Ainsi, <u>la</u> primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui vaut 0 en 0 est donnée par
   $$x \mapsto \frac{e^{3x}}{6} + \frac{2}{5}x^5 - x - \frac{1}{6}$$

3. $f : x \mapsto e^{-x} + \frac{2}{x}$ avec $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$ sur $]0, +\infty[$.

   Les primitives de f sur $]0, +\infty[$ sont de la forme
   $$x \mapsto -e^{-x} + 2\ln(|x|) + c \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R},$$
   c'est-à-dire
   $$x \mapsto -e^{-x} + 2\ln(x) + c \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$
   Ainsi, <u>la</u> primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui vaut 1 en 1 est donnée par
   $$x \mapsto -e^{-x} + 2\ln(x) + 1 + e^{-1}$$

Exercice 7 – Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ s'annulant en π des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

La primitive de $x \mapsto \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ sur $\mathbb{R}$ s'annulant en π est

$$x \mapsto -\frac{1}{3}\cos(3x - \tfrac{\pi}{4}) - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) $x \mapsto \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$

La primitive de $x \mapsto \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$ sur $\mathbb{R}$ s'annulant en π est

$$x \mapsto -2e^{-\frac{x}{2}} + 2e^{-\frac{\pi}{2}}$$

c) $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

La primitive de $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ sur $\mathbb{R}$ s'annulant en π est

$$x \mapsto -\sin(\frac{\pi}{3} - x) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 8 – Produit exponentielle avec cos/sin. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \mathrm{e}^{x}\cos(3x)$

On commence par remarquer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} \mathrm{e}^{x}\cos(3x) &= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{3ix}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(e^{(1+3i)x}\right) \end{aligned}$$

Donc, une primitive F de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x}\cos(3x)$ sur $\mathbb{R}$ est donnée par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} F(x) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+3i}\mathrm{e}^{(1+3i)x}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1-3i}{10}\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{3ix}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1-3i}{10}\mathrm{e}^{x}(\cos(3x)+i\sin(3x))\right) \\ &= \boxed{\mathrm{e}^{x}\left(\frac{1}{10}\cos(3x)+\frac{3}{10}\sin(3x)\right)}. \end{aligned}$$

2. $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\sin(3x)$

On commence par remarquer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} \mathrm{e}^{2x}\sin(3x) &= \mathrm{Im}\left(e^{2x}e^{ix}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(e^{(2+i)x}\right) \end{aligned}$$

Donc, une primitive F de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$ est donnée par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} F(x) &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2+i}\mathrm{e}^{(2+i)x}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{2-i}{5}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{ix}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{2-i}{5}\mathrm{e}^{2x}(\cos(x)+i\sin(x))\right) \\ &= \boxed{\mathrm{e}^{2x}\left(-\frac{1}{5}\cos(x)+\frac{2}{5}\sin(x)\right)}. \end{aligned}$$

Exercice 9 – On considère la fonction f définie sur $]-\infty,1[$ par

$$\forall x < 1, \qquad f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4x+3}$$

1. Déterminer deux réels a, b tels que :

$$\forall x \in]-\infty,1[, \qquad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}.$$

Soit $x \in]-\infty,1[$. On a,

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3} = \frac{a(x-3)}{(x-1)(x-3)} + \frac{b(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{(a+b)x-3a-b}{x^2-4x+3}$$

Ainsi,

$$\forall x < 1, \;\; \frac{(a+b)x-3a-b}{x^2-4x+3} = \frac{2x+1}{x^2-4x+3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 2 \\ -3a & - & b & = & 1 \end{array} \right.$$

En résolvant le système grâce à la méthode du pivot de Gauss, on obtient

$$a = -\frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{7}{2}$$

2. En déduire une primitive de f sur $]-\infty,1[$.

D'après la question précédente,

$$\forall x \in]-\infty,1[, \qquad f(x) = -\frac{3}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{7}{2}\frac{1}{x-3}.$$

Donc, <u>une</u> primitive de f sur $]-\infty,1[$ est la fonction F, donnée par

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty,1[, \qquad F(x) &= -\frac{3}{2}\ln(|x-1|) + \frac{7}{2}\ln(|x-3|) \\ &= -\frac{3}{2}\ln(1-x) + \frac{7}{2}\ln(3-x) \end{aligned}$$

car, pour tout $x \in]-\infty,1[$, $x-1<0$ et $x-3<0$.

3. En déduire la primitive de f qui s'annule en 0.

Donc, <u>la</u> primitive de f sur $]-\infty,1[$ est la fonction G, donnée par

$$\forall x \in]-\infty,1[, \qquad G(x) = -\frac{3}{2}\ln(1-x) + \frac{7}{2}\ln(3-x) - \frac{7}{2}\ln(3)$$

Exercice 10 – On considère la fonction g définie sur $I = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par

$$\forall x > \frac{1}{2}, \qquad g(x) = \frac{1}{4x^2 - 4x + 1}$$

1. Justifier que g admette une primitive sur I.

   La fonction g est **continue** sur I en tant que quotient de fonctions continues sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I. Donc elle admet des primitives sur I.

2. Factoriser, pour $x \in \mathbb{R}$, $4x^2 - 4x + 1$.

   On remarque que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$$

3. En déduire une primitive de g sur I

   D'après la question précédente,
   $$\forall x \in I, \qquad g(x) = \frac{1}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{(2x-1)^2}$$
   Donc une primitive de g sur $]1/2, +\infty[$ est
   $$G : x \mapsto -\frac{1}{2(2x-1)}$$

Exercice 11 – On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

1. Mettre sous forme canonique le polynôme $x \mapsto x^2 - 2x + 2$

   On remarque que,
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$

2. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

   D'après la question précédente,
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} = \frac{1}{1 + (x-1)^2}$$
   Donc, <u>une</u> primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction
   $$x \mapsto \arctan(x-1)$$

Exercice 12 – On considère la fonction f définie sur $I = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ par

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$$

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

En multipliant l'égalité par x puis en évaluant en $x = 0$, on trouve $a = -2$.
En multipliant l'égalité par $x - 1$ puis en évaluant en $x = 1$, on trouve $b = 1$.
En multipliant l'égalité par $x + 1$ puis en évaluant en $x = -1$, on trouve $c = 1$.

2. En déduire une primitive de f sur $]1, +\infty[$.

D'après la question précédente,

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \frac{-2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

Donc, <u>une</u> primitive de f sur $]1, +\infty[$ est donnée par

$$x \mapsto -2\ln(|x|) + \ln(|x-1|) + \ln(|x+1|)$$

soit,

$$x \mapsto -2\ln(x) + \ln(x-1) + \ln(x+1)$$

car pour tout $x \in]1, +\infty[$, $x > 0$, $x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$.

3. En déduire une primitive de f sur $]0, 1[$.

De même, <u>une</u> primitive de f sur $]0, 1[$ est donnée par

$$x \mapsto -2\ln(|x|) + \ln(|x-1|) + \ln(|x+1|)$$

soit

$$x \mapsto -2\ln(x) + \ln(-x+1) + \ln(x+1)$$

car pour tout $x \in]0, 1[$, $x > 0$, $x - 1 < 0$ et $x + 1 > 0$.

Exercice 13 – Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Si f est impaire, ses primitives sont-elles impaires ? paires ?

   On peut commencer par remarquer que la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x$, qui est une fonction impaire, est la fonction $x \mapsto x^2/2$ qui est une fonction paire. Ceci conduit à vouloir démontrer la conjecture suivante : «*toute primitive d'une fonction impaire est une fonction paire*». Démontrons maintenant cette conjecture.

   Preuve. Soit f une fonction impaire sur $\mathbb{R}$ et notons F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On introduit la fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par,

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \phi(x) = F(x) - F(-x).$$

   Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction ϕ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et

   $$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \phi'(x) &= F'(x) + F'(-x) \\ &= f(x) + f(-x) \qquad \text{car } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R} \\ &= 0 \qquad \text{car } f \text{ est impaire sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

   Donc, ϕ est de dérivée nulle, c'est donc une fonction constante :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \phi(x) = \phi(0) = 0$$

   c'est-à-dire

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = F(-x)$$

   Ainsi, F est une fonction paire sur $\mathbb{R}$.

2. Si f est paire, ses primitives sont-elles paires ? impaires ?

   On montre de même que toute primitive d'une fonction paire est une fonction impaire.

Exercice 14 – CCINP, MP/MPI. Déterminer une primitive de

$$x \mapsto \cos^4(x) \text{ sur } \mathbb{R}$$

En **linéarisant** le cosinus, on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^4(x) = \frac{1}{8}\left(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3\right)$$

Donc, une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^4(x)$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x$$