TD 01 – Étude qualitative d'une fonction

Exercice 1 – Domaine de définition. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x+3}$

b) $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$

c) $f_3 : x \mapsto \sqrt{2x+1}$

d) $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2-4x+3}$

e) $f_5 : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{3}x-5\right)$

f) $f_6 : x \mapsto \ln(x+3)-\ln(2x+1)$

g) $f_7 : x \mapsto x^{\frac{1}{7}}$

h) $f_8 : x \mapsto \exp(3x+2)$

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{D}_i$ l'ensemble de définition de la fonction f_i (pour $i = 1, \dots, 8$)

1. On a

$x \in \mathcal{D}_1 \iff x+3 \neq 0$

$\iff x \neq -3$

Donc $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

2. Comme $x \mapsto x^2+1$ ne s'annule jamais, on a

$\mathcal{D}_2 = \mathbb{R}$

3. On a

$x \in \mathcal{D}_3 \iff 2x+1 \geq 0$

$\iff x \geq -\frac{1}{2}$

Donc

$\mathcal{D}_3 = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

4. Commençons par tracer le tableau de signe de la fonction $x \mapsto x^2-4x+3$

Résolvons $x^2-4x+3=0$.

. On calcule le discriminant

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3$

$= 16-12$

$= 4$

. Comme $\Delta > 0$, deux racines :

$x_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2} = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$

et $x_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2} = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Donc on a

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Finalement, on a

$x \in \mathcal{D}_4 \iff x^2-4x+3 \geq 0$

$\iff x \in]-\infty, 1] \cup [3; +\infty[$

Donc

$\mathcal{D}_4 =]-\infty, 1] \cup [3; +\infty[$.

5. On a

$x \in \mathcal{D}_5 \iff \frac{x}{3} - 5 > 0$

$\iff x > 15$

Donc $\mathcal{D}_5 =]15; +\infty[$

6. On a

$x \in \mathcal{D}_6 \iff \begin{pmatrix} x+3>0 \\ \text{et} \\ 2x+1>0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} x > -3 \\ \text{et} \\ x > -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Donc

$\mathcal{D}_6 =]-3; +\infty[\cap]-\frac{1}{2}; +\infty[$

$=]-\frac{1}{2}; +\infty[$

7. $\mathcal{D}_7 =]0; +\infty[$ (car fonction puissance réelle (*))

8. Comme les fonctions $x \mapsto 3x+2$ et $x \mapsto \exp(x)$ sont définies sur $\mathbb{R}$, par composée, la fonction f_8 est définie sur $\mathbb{R}$.

Donc $\mathcal{D}_8 = \mathbb{R}$.

Exercice 2 – Domaine de définition. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{4-x^2}$

b) $f_2 : x \mapsto e^x \ln(2x+3)$

c) $f_3 : x \mapsto \ln(e^x - 1)$

d) $f_4 : x \mapsto \ln(\ln(x))$

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{D}_i$ l'ensemble de définition de la fonction f_i (pour $i = 1, \dots, 4$)

1. On a

$x \in \mathcal{D}_1 \iff (x+1>0 \text{ et } 4-x^2 \neq 0)$

$\iff (x>-1 \text{ et } x=2 \text{ et } x=-2)$

Donc $\mathcal{D}_1 =]-1;+\infty[- \backslash \{2,-2\}$

$=]-1;+\infty[- \{2\}$

2. La fonction $x \mapsto e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \ln(2x+3)$ est bien définie sur $]-\frac{3}{2};+\infty[$ (car $2x+3>0 \iff x>-\frac{3}{2}$). Donc la fonction f_2 est bien définie sur $]-\frac{3}{2};+\infty[$

$\mathcal{D}_2 =]-\frac{3}{2};+\infty[$

3. On a

$x \in \mathcal{D}_3 \iff e^x - 1 > 0$

$\iff e^x > 1$

$\iff x > \ln(1) = 0$

Donc $\mathcal{D}_3 =]0;+\infty[$.

4. On a

$x \in \mathcal{D}_4 \iff \ln(x) > 0 \quad \text{et } x>0$

$\iff x > e^0 = 1 \text{ et } x > 0$

Donc $\mathcal{D}_4 =]1;+\infty[$

Exercice 3 – À valeurs dans.... Déterminer, pour chaque fonction ci-dessous, un intervalle dans lequel la fonction prend ses valeurs.

a) $x \mapsto x^2 + 1$

On peut commencer par remarquer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^2 \geqslant 0$$

et donc que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^2 + 1 \geqslant 1$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^2 + 1 \in [1, +\infty[$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est $\boxed{\text{à valeurs dans } [1, +\infty[.}$

b) $x \mapsto \exp(x-1)$

Par propriété de la fonction exponentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(x-1) > 0$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(x-1) \in]0, +\infty[$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \exp(x-1)$ est $\boxed{\text{à valeurs dans }]0, +\infty[.}$

c) $x \mapsto 2\sin(x)$

On peut commencer par remarquer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$$

et donc, en multipliant par $2 > 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -2 \leqslant 2\sin(x) \leqslant 2$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 2\sin(x) \in [-2, 2]$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto 2\sin(x)$ est $\boxed{\text{à valeurs dans } [-2, 2].}$

Exercice 4 – Composition de fonctions. Déterminer, lorsque cela est possible, $f \circ g$ et $g \circ f$ *(on donnera, quand c'est possible, l'ensemble de définition et l'expression de la composée).*

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$ $\qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x-1 \end{array}$

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ $\qquad g : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$

3. $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$ $\qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-1 \end{array}$

1. Les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$. Donc les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définies sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   - $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^3$
   - $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) - 1 = x^3 - 1$

2. • Pour tout $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \in \mathcal{D}_g = [0;+\infty[$. Donc $g \circ f$ est bien définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, on a
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

   • Pour tout $x \in \mathcal{D}_g = [0;+\infty[$, $g(x) = \sqrt{x} \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Donc $f \circ g$ est bien définie sur $\mathcal{D}_g = [0;+\infty[$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_g = [0;+\infty[$, on a
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x.$$

3. • Pour tout $x \in \mathcal{D}_f =]0;+\infty[$, $f(x) = \ln(x) \in \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$. Donc $g \circ f$ est bien définie sur $\mathcal{D}_f =]0;+\infty[$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f =]0;+\infty[$,
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x)^2 - 1 = (\ln(x))^2 - 1.$$

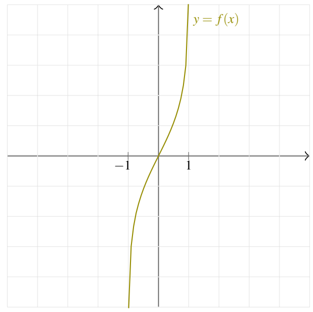
   • On se demande maintenant si

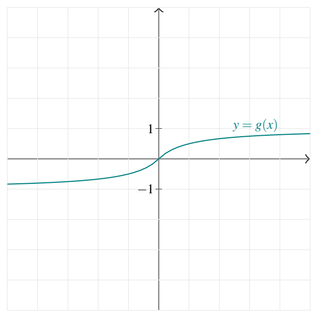
   pour tout $x \in \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, $g(x) \in \mathcal{D}_f =]0;+\infty[$

   c'est faux car pour $x = 0$, $g(0) = -1 \notin \mathcal{D}_f =]0;+\infty[$

   donc la composée $f \circ g$ n'est pas bien définie.

Exercice 5 – Représentation graphique. Pour les fonctions suivantes, à partir du graphe, donner : le domaine de définition, la parité, la monotonie, les éventuels minorants, majorants et extrema.





- Pour la fonction f :
  - domaine de déf : $]-1,1[$
  - la fct est impaire
  - la fct est strict. croissante sur $]-1,1[$
  - pas de majorants/minorants
  - pas d'extrema

- Pour la fonction g :
  - domaine de déf : $\mathbb{R}$
  - la fct est impaire
  - la fct est strict. croissante sur $\mathbb{R}$
  - majorants : $1, 2, \ldots$
  - minorants : $-1, -2, \ldots$
  - pas d'extrema

Exercice 6 – Calcul de dérivées. Pour chaque fonction suivante, donner le domaine de définition, calculer sa dérivée et donner le domaine de définition de sa dérivée.

Ensemble de déf.	Fonction	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
$\mathbb{R}$	$x \mapsto 13x^2 + 3x - 49$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 26x + 3$
$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{3x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{3x^2}$
$\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$	$x \mapsto \frac{3}{4x+2}$	$\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$	$x \mapsto -\frac{3}{(2x+1)^2}$ (*)
$[-1, +\infty[$	$\sqrt{x+1}$	$]-1, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(x)\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin^2(x) + \cos^2(x)$
$\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{7}\}$	$x \mapsto \frac{4x+8}{21x-3}$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{7}\}$	$x \mapsto -\frac{20}{(7x-1)^2}$ (**)
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{2}{x^3}$
$]-1, +\infty[$	$x \mapsto 1 + \ln(1+x)$	$]-1, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{1+x}$
$\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$	$x \mapsto \frac{\exp(2x)}{x^2-1}$	$\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$	$x \mapsto \frac{2e^{2x}(x^2-x-1)}{(x^2-1)^2}$

(*) ou avant simplification $x \mapsto -\frac{12}{(4x+2)^2}$

(**) ou avant simplification $x \mapsto -\frac{180}{(21x-3)^2}$

Exercice 7 – Parité/imparité. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. On définit les trois fonctions suivantes, f_1, f_2 et f_3

$$f_1 : x \mapsto \frac{x^2}{x^4+1}; \quad f_2 : x \mapsto \sin(2x)\cos(x); \quad f_3 : x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$$

   Montrer que f_1 est paire, f_2 est impaire (sur leurs ensembles de définition respectifs) et f_3 est ni paire, ni impaire sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la parité des fonctions suivantes (en précisant au préalable leur ensemble de définition).

$$f_4 : x \mapsto e^x - e^{-x}; \quad f_5 : x \mapsto x^2\ln(x); \quad f_6 : x \mapsto x^3 + \frac{1}{x}$$

3. Que dire (en terme de parité) de la somme de deux fonctions paires ? De la somme de deux fonctions impaires ? De la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
4. Démontrer qu'une fonction polynomiale de degré 2 admettant deux racines qui sont opposées est paire.

1. •• Soit $f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^2}{x^4+1} \end{array}$

Tout d'abord, f_1 est bien définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto x^4+1$ ne s'annule jamais.

- le domaine de f_1 est sym % à zéro.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f_1(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^4+1} = \frac{x^2}{x^4+1} = f_1(x).$$

Donc f_1 est paire sur $\mathbb{R}$.

•• Soit $f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(2x)\cos(x) \end{array}$

- le domaine de f_2 est bien sym % à zéro.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f_2(-x) = \sin(-2x)\cos(-x) = -\sin(2x)\cos(x) = -f_2(x)$$

Donc f_2 est impaire sur $\mathbb{R}$.

•• Soit $f_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1} \end{array}$

Tout d'abord, f_1 est bien définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto x^2+1$ ne s'annule jamais.
Déjà le domaine de f_3 est bien symétrique % à zéro.

- On a $f_3(1) = 0$ et $f_3(-1) = -1$.
- Comme $f_3(1) \neq f_3(-1)$, f_3 n'est pas paire.
- Comme $f_3(1) \neq -f_3(-1)$, f_3 n'est pas impaire.

2. •• Soit $f_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(x) - \exp(-x) \end{array}$

Tout d'abord, $x \mapsto \exp(-x)$ est bien déf sur $\mathbb{R}$ comme composée des 2 fcts $x \mapsto \exp(x)$ et $x \mapsto -x$ définie sur $\mathbb{R}$. Puis f_4 est bien définie sur $\mathbb{R}$ comme soustraction de 2 fcts définies sur $\mathbb{R}$.

De plus, le domaine de f_4 est sym % à 0.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f_4(-x) = \exp(-x) - \exp(-(-x)) = \exp(-x) - \exp(x) = -f_4(x)$$

Donc f_4 est impaire.

•• Soit $f_5 : \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2\ln(x). \end{array}$

Comme $x \mapsto x^2$ est déf. sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \ln(x)$ est déf sur $]0,+\infty[$, f_5 est bien déf sur $]0,+\infty[$.

Comme le domaine n'est pas symétrique par rapport à zéro, f_5 n'est ni paire ni impaire.

•• Soit $f_6 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 + \frac{1}{x}. \end{array}$

Comme $x \mapsto x^3$ est déf sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, f_6 est déf sur $\mathbb{R}^*$.
le domaine de f_6 est sym % à 0.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a

$$f_6(-x) = (-x)^3 + \frac{1}{(-x)} = -x^3 - \frac{1}{x} = -f_6(x)$$

Donc f_6 est impaire.

3. . la somme de deux fonctions paires est paire.

Soient f et g deux fonctions paires définies sur un ens $\mathcal{D}$ sym. % à zéro.
Montrons que la fct $f+g$, définie aussi sur $\mathcal{D}$ est paire.
Soit $x \in \mathcal{D}$. On a

$$\begin{aligned}(f+g)(-x) &= f(-x)+g(-x)\\ &= f(x)+g(x) \quad \text{car } f \text{ et } g \text{ sont paires}\\ &= (f+g)(x)\end{aligned}$$

Donc $f+g$ est paire.

. . De même, la somme de deux fonctions impaires est impaire.

. . Pour la somme d'une fonction paire et d'une fct impaire, on ne peut rien dire

la fct $x \mapsto x$ est impaire et la fct $x \mapsto 1$ est paire.
Pourtant, la fct $x \overset{f}{\mapsto} x+1$ est ni paire ni impaire :

$$f(1)=2 \quad \text{et} \quad f(-1)=0$$

4. Un polynôme P de degré 2 qui admet deux racines notées x_1 et x_2 peut toujours s'écrire :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \lambda(x-x_1)(x-x_2)$$

Ici, on suppose que les racines sont opposées, i.e

$$x_2 = -x_1$$

$$\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned}P(x) &= \lambda(x-x_1)(x+x_1)\\ &= \lambda(x^2-x_1^2)\end{aligned}$$

Montrons que P est pair.

* Son domaine de définition, $\mathbb{R}$, est symétrique par rapport à 0.
* Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}P(-x) &= \lambda((-x)^2-x_1^2)\\ &= \lambda(x^2-x_1^2)\\ &= P(x)\end{aligned}$$

Donc P est paire

Exercice 8 – Vrai/Faux sur la parité. Indiquer si les affirmations qui suivent sont vraies ou fausses. Lorsque les affirmations sont fausses, donner un contre-exemple. Dans toutes les questions, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Si $f(1) = f(-1)$ alors f est paire.

   FAUX. Considérons par exemple la fonction $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 - x + 2$. Alors, on remarque que
   $$f(1) = f(-1) = 0$$
   Pourtant, la fonction f n'est pas paire, par exemple car
   $$f(2) = 0 \qquad \text{tandis que} \qquad f(-2) = -12 \neq f(2).$$

2. Si f est impaire alors $f(2) = -f(-2)$.

   VRAI. Si f est impaire, alors
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-x) = -f(x)$$
   En particulier, en prenant $x = 2$ dans l'égalité précédente, on obtient,
   $$f(-2) = -f(2)$$
   c'est-à-dire
   $$f(2) = -f(-2)$$

3. Si f est paire alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = f(-x_0)$.

   VRAI. Si f est paire, alors
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-x) = f(x)$$
   L'égalité est vraie pour tout point $x \in \mathbb{R}$, en particulier, elle est vraie pour un seul point. Par exemple, en prenant $x = 1$ dans l'égalité précédente, on sait que
   $$f(-1) = f(1)$$
   Ainsi, il existe bien un $x_0 = 1 \in \mathbb{R}$ (par exemple) tel que $f(x_0) = f(-x_0)$.

4. S'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(-x_1) = -f(x_1)$ avec $f(x_1) \neq 0$ alors f n'est pas paire.

   VRAI. Soit f une fonction telle qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(-x_1) = -f(x_1)$ avec $f(x_1) \neq 0$. Montrons que f n'est pas paire. Supposons par l'absurde que f est paire. Alors,
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-x) = f(x)$$
   En particulier, on obtient que
   $$f(-x_1) = f(x_1)$$
   Or,
   $$f(-x_1) = -f(x_1)$$
   Ainsi,
   $$f(-x_1) = f(x_1) = -f(x_1)$$
   Ainsi,
   $$2f(x_1) = 0 \qquad \text{donc} \qquad f(x_1) = 0$$
   Ceci est absurde. Donc f n'est pas paire.

Exercice 9 – Oral CCINP PC 2014. Soient $a > 0$ et f une fonction paire, dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = f(x+a)$$

1. Montrer que f' est impaire.
2. Montrer que f'' est définie et paire.
3. Prouver que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(a+x) + f(a-x) = 0$$
4. Montrer que $f'' + f = 0$.

1. Le domaine de définition de f', $\mathbb{R}$, est symétrique % à zéro.
Comme f est paire, on sait que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x)$$
Donc en dérivant,
$$\forall x \in \mathbb{R}, -f'(-x) = f'(x)$$
Donc f' est impaire (sur $\mathbb{R}$).

2. • On sait que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x+a)$$
Comme f et $x \mapsto x+a$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, par composition, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, c-a-d f'' existe sur $\mathbb{R}$.

• De plus, d'après la question précédente, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) = -f'(x)$$
Donc en dérivant, on obtient
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f''(-x) = -f''(x)$$
c-à-d
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) = f''(x).$$ et $\mathcal{D}_{f''} = \mathbb{R}$ est sym % à zéro.

Donc f'' est paire sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} f(a+x) + f(a-x) &= f(x+a) + f(-x+a) \\ &= f'(x) + f'(-x) \quad \text{d'après l'hyp de l'énoncé} \\ &= 0 \quad \text{car } f' \text{ est impaire (cf q°1)}. \end{aligned}$$

4. On sait que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x+a)$$
Donc en dérivant,
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) &= f'(x+a) \\ &= f(x+a+a) \quad \text{d'après l'hyp} \\ &= -f(a-(x+a)) \quad \text{d'après la q°3} \\ &= -f(-x) \\ &= -f(x) \quad \text{car } f \text{ est paire} \end{aligned}$$

Exercice 10 – Périodicité. Montrer que la fonction suivante est 4π-périodique.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(2x) - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \end{array}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

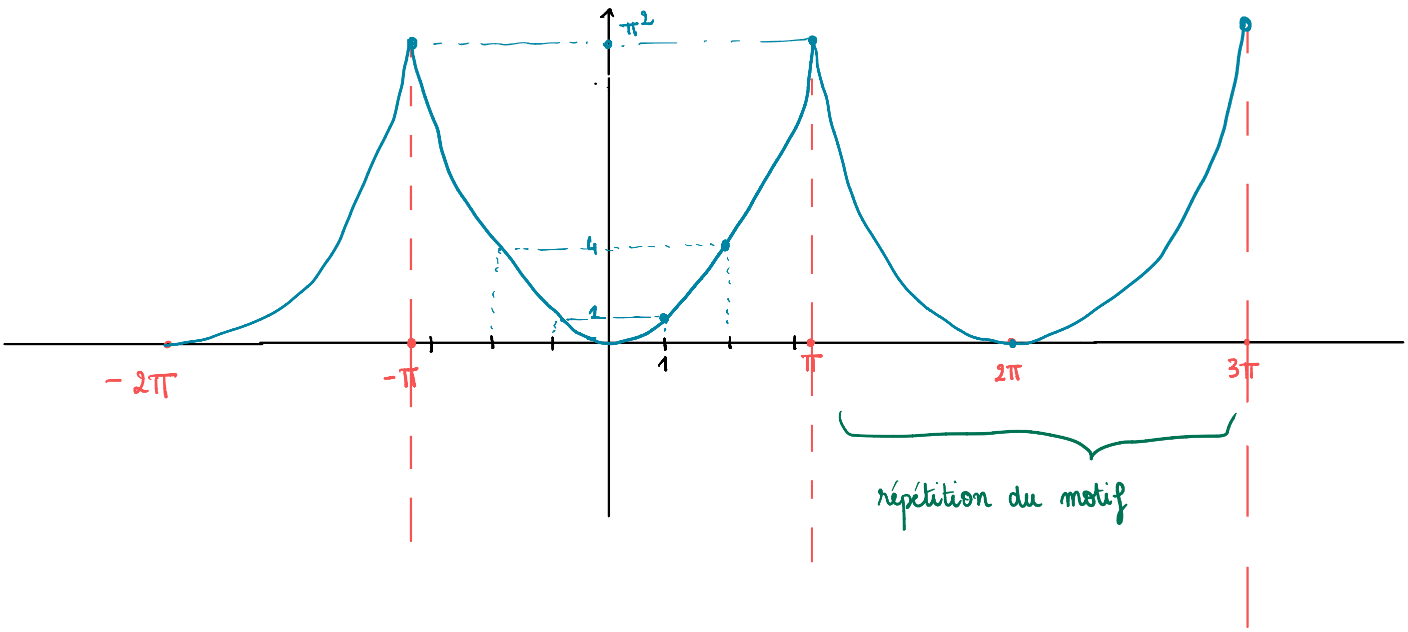
$$\begin{aligned} f(x+4\pi) &= \sin(2(x+4\pi)) - 2\cos\left(\frac{x+4\pi}{2}\right) \\ &= \sin(2x+8\pi) - 2\cos\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) \\ &= \sin(2x) - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

car les fcts cosinus et sinus sont 2π-périodiques

Exercice 11 – Oral CCINP TSI 2021. Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par,

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = x^2$$

Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi, 3\pi]$.



Exercice 12 – Monotonie et inégalités. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Montrer que pour tout $x \in [1,3[$, on a
$$-2 \leqslant -\frac{2}{x^2} \leqslant -\frac{2}{9}.$$

2. Montrer que pour tout $x \in [-3,2]$, on a
$$\frac{1}{6} \leqslant \frac{3}{(x-1)^2+2} \leqslant \frac{3}{2}.$$

3. Montrer que pour tout $u \in [1,4]$, on a
$$\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{\sqrt{u}+u-1} \leqslant 1.$$

4. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $2 \leqslant a \leqslant 3$ et $1 \leqslant b \leqslant 2$. Montrer que l'on a
$$2 \leqslant a^2 - \frac{2}{b} \leqslant 8.$$

1. Soit $x \in [1,3[$.

•• On a $x \geqslant 1$

donc $x^2 \geqslant 1$ car $x \mapsto x^2$ croissante sur $\mathbb{R}_+$

donc $-x^2 \leqslant -1$ car $-1<0$

donc $-\frac{1}{x^2} \geqslant -1$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$

donc $-\frac{2}{x^2} \geqslant -2$ car $2>0$

•• On a $x \leqslant 3$

donc $x^2 \leqslant 9$ car $x \mapsto x^2$ croissante sur $\mathbb{R}_+$

donc $-x^2 \geqslant -9$ car $-1<0$

donc $-\frac{1}{x^2} \leqslant -\frac{1}{9}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$

donc $-\frac{2}{x^2} \leqslant -\frac{2}{9}$ car $2>0$

2. Soit $x \in [-3,2]$. On a

$\frac{1}{6} \leqslant \frac{3}{(x-1)^2+2} \leqslant \frac{3}{2} \iff \frac{1}{18} \leqslant \frac{1}{(x-1)^2+2} \leqslant \frac{1}{2}$

car $3>0$

$\iff 18 \geqslant (x-1)^2+2 \geqslant 2$

car tous les termes sont >0
et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strict. décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff 18 \geqslant (x-1)^2+2$
et $(x-1)^2+2 \geqslant 2$

$\iff (x-1)^2 \leqslant 16$ et $\underbrace{(x-1)^2 \geqslant 0}_{\text{toujours vrai}}$

$\iff (x-1)^2 \leqslant 16$

$\iff |x-1| \leqslant 4$

car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
et $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$
car $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

$\iff -4 \leqslant x-1 \leqslant 4$

$\iff -3 \leqslant x \leqslant 5$

La dernière inégalité est vraie pour $x \in [-3,2]$.
Donc, pour tout $x \in [-3,2]$, on a
$\frac{1}{6} \leqslant \frac{3}{(x-1)^2+2} \leqslant \frac{3}{2}$

3. Soit $u \in [1,4]$.

• $u \geqslant 1$ donc $u-1 \geqslant 0$
et $\sqrt{u} \geqslant \sqrt{1} = 1$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $\sqrt{u}+u-1 \geqslant 1$

donc $\frac{1}{\sqrt{u}+u-1} \leqslant 1$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et les deux termes sont >0

• $u \leqslant 4$ donc $u-1 \leqslant 3$
et $\sqrt{u} \leqslant \sqrt{4} = 2$ car...

donc $\sqrt{u}+u-1 \leqslant 5$

donc $\frac{1}{\sqrt{u}+u-1} \geqslant \frac{1}{5}$ car...

4. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $2 \leqslant a \leqslant 3$ et $1 \leqslant b \leqslant 2$.

On a (*) $4 \leqslant a^2 \leqslant 9$ car tous les termes sont $\geqslant 0$ et $x \mapsto x^2$ croissante sur $\mathbb{R}_+$

et $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant 1$ car tous les termes sont >0 et $x \mapsto \frac{1}{x}$ croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $1 \leqslant \frac{2}{b} \leqslant 2$ car $2>0$

donc (**) $-2 \leqslant -\frac{2}{b} \leqslant -1$

En sommant les inégalités (*) et (**), on obtient

$2 \leqslant a^2 - \frac{2}{b} \leqslant 8.$

Exercice 13 – Étude complète d'une fonction. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 - 3x + 1 \end{array}$$

1. Dresser le tableau de variations de f. *On admet que*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2. Tracer l'allure la courbe représentative de la fonction f.
3. La fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ? Si oui, préciser sa valeur et le ou les valeurs en le(s)quel(s) il est atteint.
4. La fonction f est-elle paire ? impaire ? Justifier.

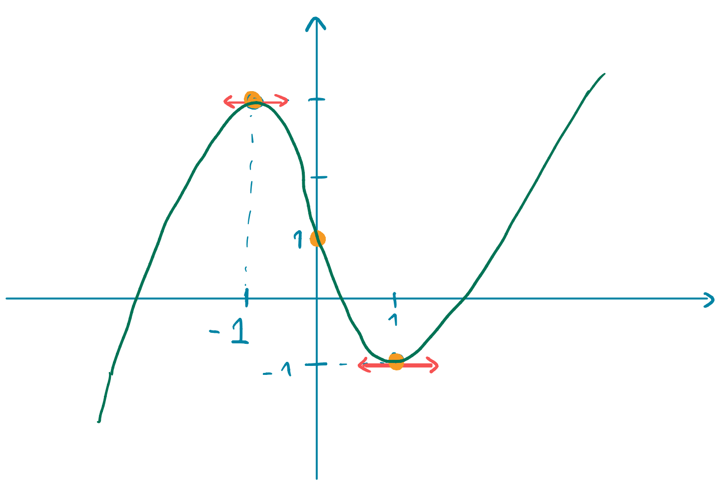
1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \boxed{3x^2 - 3}$$
$$= 3(x-1)(x+1)$$

On peut en déduire le tableau de signe de f' puis le tableau de variations de f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2.



3. • pas de minimum car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
• pas de maximum car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

4. $f(-1) \neq f(1)$ donc f pas paire
$f(-1) \neq -f(1)$ donc f pas impaire

Exercice 14 – Écrit ECRICOME ECE 2023. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x-1}{2x} f(x).$$

La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ (qui sont $x \mapsto \exp(\frac{x}{2})$ et $x \mapsto \sqrt{x}$) dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. Sa dérivée est donnée par,

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0,+\infty[, \qquad f'(x) &= \frac{\frac{1}{2}\exp(\frac{x}{2})\sqrt{x} - \exp(\frac{x}{2})\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} \\
&= \frac{\exp(\frac{x}{2})\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} \\
&= \frac{\exp(\frac{x}{2})\left(\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} \\
&= \frac{\exp(\frac{x}{2}) \times \frac{x-1}{2\sqrt{x}}}{x} \\
&= \frac{x-1}{2x} \times \frac{\exp(\frac{x}{2})}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{x-1}{2x} \times f(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien démontré que

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, \qquad f'(x) = \tfrac{x-1}{2x} \times f(x)}$$

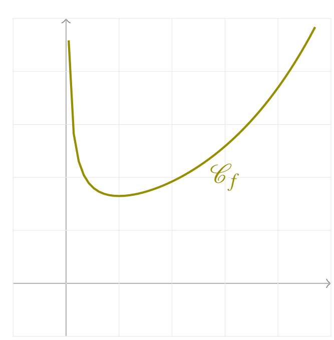
2. Dresser le tableau de variations de f. *On admet que*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

À partir du signe de la dérivée (déterminé grâce à la question précédente), on peut en déduire le tableau de variations de la fonction f de la manière suivante, puis tracer l'allure de la courbe.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$2x$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$		$+$	
f	‖	$+\infty$ ↘	$\exp(\frac{1}{2})$	↗ $+\infty$	



4. *La fonction admet-elle un minimum ? un maximum ?*

La fonction admet un $\boxed{\text{minimum qui vaut } \exp(\frac{1}{2}) \text{ et qui est atteint en } 1}$. Par contre, la fonction n'admet $\boxed{\text{pas de maximum}}$ car $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 15 – Oral CCINP TSI 2023. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = nx + \frac{1}{1+e^x}$$

1. Justifier que f_n est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et calculer f_n''.
2. Montrer que $f_n''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 0$.
3. En déduire les variations de f_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. La fonction $x \mapsto nx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ deux fois (en tant que fct polynomiale)
La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de deux fcts dérivable dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall x \in \mathbb{R}$, $1+e^x > 1$).
Par quotient, la fonction f_n est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = n - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n''(x) = -\frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x \times 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4}$$

$$= -\frac{e^x(1+e^x)\left[1+e^x - 2e^x\right]}{(1+e^x)^4}$$

$$= -\frac{e^x\left[1-e^x\right]}{(1+e^x)^3}$$

2. On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{e^x}{(1+e^x)^3} \geqslant 0$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n''(x) \geqslant 0 \iff -\left[1-e^x\right] \geqslant 0$$
$$\iff 1-e^x \leqslant 0$$
$$\iff 1 \leqslant e^x$$
$$\iff 0 \leqslant x \quad \text{car } x \mapsto \ln x \text{ strictement croissant sur } [0,+\infty[$$
$$\iff x \geqslant 0.$$

3.

	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n''(x)$		$-$	0	$+$	
f_n'	↘		$n-\frac{1}{4} \geqslant 0$		↗

	$-\infty$		$+\infty$
f_n'		$+$	
		↗	

Exercice 16 – Écrit EMLYON Maths E 2024. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{kx}$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Dresser le tableau de variations de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et 0. *On admettra que*

$$\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f_k(x) = +\infty$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_k'(x) = \mathrm{e}^{kx} + (x+1)k\mathrm{e}^{kx} = (kx+k+1)\mathrm{e}^{kx}$$

Ainsi, on en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$-1-\frac{1}{k}$		-1		0		$+\infty$
$kx+k+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
e^{kx}		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
f	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$. Vous préciserez leurs points d'intersection.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$ revient à étudier le sgine de la fonction $f_k - f_{k+1}$, donnée par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_k(x) - f_{k+1}(x) = (x+1)\mathrm{e}^{kx} - (x+1)\mathrm{e}^{(k+1)x} = \mathrm{e}^{kx}(x+1)(1-\mathrm{e}^x)$$

Ainsi, le tableau de signe de $f_k - f_{k+1}$ est donné par,

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\mathrm{e}^x - 1$		$+$		$+$	0	$-$	
$f_k(x) - f_{k+1}(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Positions relatives de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$		$\mathscr{C}_k$ en-dessous de $\mathscr{C}_{k+1}$		$\mathscr{C}_k$ au dessus de $\mathscr{C}_{k+1}$		$\mathscr{C}_k$ en-dessous de $\mathscr{C}_{k+1}$	

On en déduit que la courbe $\boxed{\mathscr{C}_k \text{ est en-dessous de la courbe } \mathscr{C}_{k+1}}$ sur les intervalles $\boxed{]-\infty,-1]}$ et $\boxed{[0,+\infty[}$; que la courbe $\boxed{\mathscr{C}_k \text{ est au dessus de la courbe } \mathscr{C}_{k+1}}$ sur l'intervalle $\boxed{[-1,0]}$; et que les deux courbes s'intersectent aux points $\boxed{(-1,0) \text{ et } (0,1)}$.

3. Dessiner sur un même graphique l'allure de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.