TD 10 – Calcul Matriciel

Exercice 1 – Écriture de matrices. Écrire en extension les deux matrices suivantes, puis donner leur taille et l'espace $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dans lequel elles vivent.

$$A = (i \times j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 5\\ 1\leqslant j\leqslant 4}} \quad \text{et} \quad B = (\min(i,j))_{\substack{1\leqslant i\leqslant 4\\ 1\leqslant j\leqslant 4}}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}}$$

Exercice 2 – Opérations sur les matrices. On considère les deux matrices A et B données par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $3A - B$, $2I_2 + A$ et $3(A - 2B)$.

$$\boxed{3A - B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{2I_2 + A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{3(A - 2B) = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}}$$

Exercice 3 – Multiplication de matrices. Calculer les produits suivants

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}}$

e) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{-1}$

f) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

Exercice 4 – Multiplication de matrices. Soient

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\3&1&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad \text{et } C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$$

Montrer que $AB=AC$.

Après calculs, on obtient,

$$\boxed{AB=AC=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\4&4&3\end{pmatrix}}$$

Exercice 5 – Calcul littéral avec les matrices. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A, B et C trois matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Développer ces expressions:
   (a) $\boxed{A(B+C) = AB+AC}$
   (b) $\boxed{(B+C)A = BA+CA}$
   (c) $\boxed{(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2}$
   (d) $\boxed{(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2}$
   (e) $\boxed{A(A^2+2A+B+I_n) = A^3+2A^2+AB+A}$
2. Factoriser ces expressions:
   (a) $\boxed{A^2+3A+AB = A(A+3I_n+B)}$
   (b) $\boxed{A^2+3A+BA = (A+3I_n+B)A}$
   (c) $\boxed{AB-2B = (A-2I_n)B}$
   (d) $\boxed{A^3+3A^2-2A = A(A^2+3A-2I_n) = (A^2+3A-2I_n)A}$
   (e) $\boxed{A^2-2A = A(A-2I_n) = (A-2I_n)A}$

Exercice 6 – Déterminer toutes les matrices qui commutent avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Raisonnons **par analyse-synthèse**.

- *Analyse*. Soit

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

une matrice qui commute avec A. On sait alors que

$$AM = MA$$

soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire en effectuant les deux produits matriciels,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, en identifiant les coefficients des deux matrices, on obtient,

$$\begin{cases} 0 & = & b \\ d & = & 0 \\ e & = & e \\ f & = & 0 \\ 0 & = & h \end{cases}$$

Ainsi, la matrice M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & i \end{pmatrix}$$

- *Synthèse.* Soit M une matrice de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & i \end{pmatrix}$$

avec a, c, e, g, i des nombres réels. Montrons que M commute avec A. En effectuant les deux produits matriciels, on peut montrer que

$$AM = MA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, M commute bien avec A et M.

Conclusion. L'ensemble des matrices qui commutent avec A est

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & i \end{pmatrix} | a, c, e, g, i \in \mathbb{R} \right\}}$$

Exercice 7 – Transposée de matrices. Donner la transposée des trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{B^\top = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{C^\top = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Exercice 8 – Puissances d'une matrice. Soient a, b et c des réels. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Montrons **par récurrence** que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathscr{P}(n) : \text{«}A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}\text{»} \qquad \text{est vraie}$$

- *Initialisation.* Montrons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie. D'une part, par convention,

$$A^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'autre part,

$$\begin{pmatrix} a^0 & 0 & 0 \\ 0 & b^0 & 0 \\ 0 & 0 & c^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité.* On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, on suppose que

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}$$

On a,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{n+1} \end{pmatrix} \qquad \text{en utilisant l'hyp de rec} \end{aligned}$$

Donc, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* D'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}}$$

Exercice 9 – Puissances d'une matrice. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Montrons **par récurrence** que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathscr{P}(n) : «A^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}» \qquad \text{est vraie}$$

- *Initialisation.* Montrons que $\mathscr{P}(1)$ est vraie. D'une part,

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'autre part,

$$\begin{pmatrix} 3^{1-1} & 3^{1-1} & 3^{1-1} \\ 3^{1-1} & 3^{1-1} & 3^{1-1} \\ 3^{1-1} & 3^{1-1} & 3^{1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

- *Hérédité.* On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire, on suppose que

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n & 3^n \\ 3^n & 3^n & 3^n \\ 3^n & 3^n & 3^n \end{pmatrix}$$

On a,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{en utilisant l'hyp de rec} \\ &= \begin{pmatrix} 3^{n-1}+3^{n-1}+3^{n-1} & 3^{n-1}+3^{n-1}+3^{n-1} & 3^{n-1}+3^{n-1}+3^{n-1} \\ 3^{n-1}+3^{n-1}+3^{n-1} & 3^{n-1}+3^{n-1}+3^{n-1} & 3^{n-1}+3^{n-1}+3^{n-1} \\ 3^{n-1}+3^{n-1}+3^{n-1} & 3^{n-1}+3^{n-1}+3^{n-1} & 3^{n-1}+3^{n-1}+3^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times 3^{n-1} & 3 \times 3^{n-1} & 3 \times 3^{n-1} \\ 3 \times 3^{n-1} & 3 \times 3^{n-1} & 3 \times 3^{n-1} \\ 3 \times 3^{n-1} & 3 \times 3^{n-1} & 3 \times 3^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & 3^n & 3^n \\ 3^n & 3^n & 3^n \\ 3^n & 3^n & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* D'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}}$$

(et par convention $A^0 = I_3$).

Exercice 10 – Puissances d'une matrice. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère les matrices

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1+\frac{a^2}{2} & \frac{a^2}{2} \\ -a & -\frac{a^2}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \end{pmatrix}$$

1. Calculer U^2.

   On a,

$$\boxed{U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

2. Trouver $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \alpha I_3 + \beta U + \gamma U^2$.

   On a,

$$\boxed{M = I_3 + aU + \frac{a^2}{2} U^2}$$

Exercice 11 – Puissances d'une matrice. À l'aide du binôme de Newton, calculer les puissances des matrices A et B où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

• **Calcul des puissances de A.** On commence par remarquer que

$$A = D + N \qquad \text{avec} \qquad D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or, les puissances de D et N sont faciles à calculer car,

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et donc (récurrence immédiate)} \qquad \forall n \geq 2, \ \ N^n = 0_2$$

et, en tant que matrice diagonale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

De plus, on a

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$$

Donc les matrices D et N <u>commutent</u>. Ainsi, d'après le binôme de Newton, on a donc

$$\begin{aligned}
\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n} &= (D+N)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \binom{n}{0} D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} N \qquad \text{les autres termes sont nuls} \\
&= D^n + nD^{n-1}N \\
&= \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 \\ 0 & a^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & na^{n-1}b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \boxed{\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}}.
\end{aligned}$$

• **Calcul des puissances de B.** De la même manière, on remarque que,

$$B = D + N \qquad \text{avec} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \geq 3, \ \ N^n = 0_3$$

De plus, les matrices D et N commutent (car d'après le calcul, $DN = ND$ ou car $DN = (3I_3)N =$

$3N = N(3I_3) = ND$). Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton, on a donc

$$\begin{aligned}
B^n &= (D+N)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= D^n + nD^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2} D^{n-2} N^2 \qquad \text{car les autres termes sont nuls.} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n + n \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 3^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2n3^{n-1} & n3^n \\ 0 & 0 & 4n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8\frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} & n3^n + 8\frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} \\ 0 & 3^n & 4n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \\
&= 3^{n-2} \begin{pmatrix} 9 & 6n & 4n^2+5n \\ 0 & 9 & 12n \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \textit{L'expression précédente convenait aussi.}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad B^n = 3^{n-2} \begin{pmatrix} 9 & 6n & 4n^2+5n \\ 0 & 9 & 12n \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}$$

Exercice 12 – Puissances d'une matrice. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$A(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(x) & \mathrm{sh}(x) \\ \mathrm{sh}(x) & \mathrm{ch}(x) \end{pmatrix}$$

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A(x)^n$. *On pourra utiliser les matrices* $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On peut commencer par remarquer que

$$A(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(x) & \mathrm{sh}(x) \\ \mathrm{sh}(x) & \mathrm{ch}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) & \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) \\ \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) & \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x J + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} K$$

où les matrices J et K sont données par

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus, les puissances des matrices J et K sont calculables. En effet, on peut montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = 2^{n-1} J \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ K^n = 2^{n-1} K$$

Or, on a $JK = 0_2$ et $KJ = 0_2$ donc les matrices J et K commutent. Ainsi, d'après le binôme de Newton, on a donc

$$\begin{aligned}
\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A(x)^n} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^x J\right)^k \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} K\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2^{n-k}} \mathrm{e}^{kx} \mathrm{e}^{(n-k)x} J^k K^{n-k} \\
&= \underbrace{\frac{1}{2^n}\mathrm{e}^{nx} J^n}_{k=0} + \underbrace{\frac{1}{2^n}\mathrm{e}^{-n} K^n}_{k=n} \qquad \text{les autres termes sont nuls puisque } JK = 0_2 \\
&= \frac{1}{2^n}\mathrm{e}^{nx} 2^{n-1} J + \frac{1}{2^n}\mathrm{e}^{-nx} 2^{n-1} K \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}) & \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{nx} - \mathrm{e}^{-nx}) \\ \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{nx} - \mathrm{e}^{-nx}) & \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}) \end{pmatrix} \\
&= \boxed{\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(nx) & \mathrm{sh}(nx) \\ \mathrm{sh}(nx) & \mathrm{ch}(nx) \end{pmatrix}.}
\end{aligned}$$

Exercice 13 – Matrices inversibles, cas particuliers. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donner leur inverse.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

a) La matrice A est de **taille** 2×2. Son déterminant vaut $\det(A) = 4 \times 1 - 2 \times (-1) = 6 \neq 0$ donc la matrice A est $\boxed{\text{inversible}}$ et son inverse vaut

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}$$

b) La matrice A est de **taille** 2×2. Son déterminant vaut $\det(A) = 4 \times 2 - (-8) \times (-1) = 0$ donc la matrice A n'est $\boxed{\text{pas inversible.}}$

c) La matrice A est **diagonale**. Un de ses coefficients diagonaux est nul donc la matrice A n'est $\boxed{\text{pas inversible.}}$

d) La matrice A est **diagonale**. Tous ses coefficients diagonaux sont non nul donc la matrice A est $\boxed{\text{inversible}}$ et son inverse vaut

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}}$$

e) La matrice A est **triangulaire inférieure**. Tous ses coefficients diagonaux sont non nul donc la matrice A est $\boxed{\text{inversible}}$ et son inverse est de la forme

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}}$$

avec a, b, c trois nombres réels non connus.

f) La matrice A est **triangulaire supérieure**. Un de ses coefficients diagonaux est nul donc la matrice A n'est $\boxed{\text{pas inversible.}}$

Exercice 14 – Matrices symétriques. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^\top A$ est une matrice symétrique.

   On a,
   $$(A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A$$
   Donc, $\boxed{A^\top A \text{ est une matrice symétrique}}$

2. Montrer que si A et B sont symétriques, alors $A+B$ est symétrique.

   On suppose que A et B sont symétriques (c'est-à-dire que $B^\top = B$ et $A^\top = A$). Alors, on a,
   $$\begin{aligned}(A+B)^\top &= A^\top + B^\top \\ &= A + B^\top && \text{car } A \text{ est symétrique} \\ &= A+B && \text{car } B \text{ est symétrique}\end{aligned}$$
   Donc, $\boxed{A+B \text{ est une matrice symétrique.}}$

3. Montrer que si B est symétrique alors $A^\top B + BA$ est symétrique.

   On suppose que B est symétrique (c'est-à-dire que $B^\top = B$). Alors, on a,
   $$\begin{aligned}(A^\top B + BA)^\top &= (A^\top B)^\top + (BA)^\top \\ &= B^\top (A^\top)^\top + A^\top B^\top \\ &= B^\top A + A^\top B^\top \\ &= BA + A^\top B && \text{car } B \text{ est symétrique} \\ &= A^\top B + BA\end{aligned}$$
   Donc, $\boxed{A^\top B + BA \text{ est une matrice symétrique.}}$

Exercice 15 – Matrices symétriques et antisymétriques. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On considère les matrices

$$S = \frac{1}{2}(A + A^\top) \quad \text{et} \quad T = \frac{1}{2}(A - A^\top)$$

1. Calculer S et T dans le cas particulier où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

   En déduire que S et T sont respectivement symétrique et antisymétrique.

   On peut calculer que

$$\begin{aligned}
\boxed{S} &= \frac{1}{2}(A + A^\top) \\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 10 & 14 & 18 \end{pmatrix} \\
&\boxed{= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

   et on remarque que S est une matrice symétrique. De même, on a,

$$\boxed{T = \frac{1}{2}(A - A^\top) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})}$$

2. Dans le cas général, montrer que S est symétrique, T est antisymétrique et que $A = S + T$.

   Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On considère les matrices

$$\boxed{S = \frac{1}{2}(A + A^\top)} \quad \text{et} \quad \boxed{T = \frac{1}{2}(A - A^\top)}$$

   - La matrice S est symétrique car,

$$S^\top = \frac{1}{2}(A + A^\top)^\top = \frac{1}{2}(A^\top + (A^\top)^\top) = \frac{1}{2}(A^\top + A) = S$$

   - De même, la matrice T est antisymétrique car,

$$T^\top = \frac{1}{2}(A - A^\top)^\top = \frac{1}{2}(A^\top - (A^\top)^\top) = \frac{1}{2}(A^\top - A) = -\frac{1}{2}(A - A^\top) = -T$$

   - Enfin, on remarque que

$$S + T = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top) = \frac{1}{2}(A + A^\top + A - A^\top) = \frac{1}{2}(2A) = A$$

Exercice 16 – Polynômes annulateurs.

1. On considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que $A^3 - A^2 + 2A + 11I_3 = 0_3$.

   On peut calculer que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 8 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} -16 & -1 & 2 \\ -4 & -5 & 1 \\ 1 & -6 & -17 \end{pmatrix}$$

   et après on peut montrer que

$$A^3 - A^2 + 2A + 11I_3 = 0_3$$

   (b) En déduire que A est inversible et donner son inverse.

   On a

$$\begin{array}{ll} & A^3 - A^2 + 2A + 11I_3 = 0_3 \\ \text{donc} & A^3 - A^2 + 2A = 11I_3 \\ \text{donc} & \frac{1}{11}\left(A^3 - A^2 + 2A\right) = I_n \\ \text{donc} & A \times \frac{1}{11}\left(A^2 - A + 2I_n\right) = I_n \end{array}$$

   Donc A est $\boxed{\text{inversible}}$ et son inverse est donné par

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{11}\left(A^2 - A + 2I_3\right) = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -3 & 7 & 2 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}}$$

2. On considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que $A^2 = 6A$.

   En effectuant le calcul matriciel, on obtient,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 30 & -12 & 6 \\ -12 & 12 & 12 \\ 6 & 12 & 30 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad 6A = \begin{pmatrix} 30 & -12 & 6 \\ -12 & 12 & 12 \\ 6 & 12 & 30 \end{pmatrix}$$

   D'où $A^2 = 6A$.

   (b) En raisonnant par l'absurde, en déduire que A n'est pas inversible.

   Supposons **par l'absurde** que A est inversible, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $A^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Alors, on a

$$\begin{array}{lll} & A^2 = 6A & \text{d'après l'énoncé} \\ \text{donc} & A \cdot A = 6 \cdot A & \\ \text{donc} & A \cdot A \cdot A^{-1} = 6A \cdot A^{-1} & \text{en multipliant à droite par } A^{-1} \\ \text{donc} & A \cdot I_n = 6 \cdot I_n & \text{car } A \cdot A^{-1} = I_n \\ \text{donc} & A = 6 \cdot I_n & \end{array}$$

   Or, la dernière égalité est absurde. Donc, cela démontre que la matrice A n'est $\boxed{\text{pas inversible.}}$

Exercice 17 – Polynômes annulateurs. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$A(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

1. Calculer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $A(x)A(y)$.

   On peut montrer que,

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad A(x)A(y) = A(x+y)}$$

2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $A(x)^n$.

   On déduit de la question précédente, grâce à un raisonnement par récurrence que,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad A(x)^n = A(nx)}$$

3. Déduire également de la question 1 que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x)$ est inversible et calculer son inverse.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 1, on a,

$$A(x)A(-x) = A(0) = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

   On en déduit que la matrice $A(x)$ est $\boxed{\text{inversible}}$ et que son inverse est donné par

$$\boxed{A(x)^{-1} = A(-x)}$$

Exercice 18 – Une flopée de contre-exemples. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont fausses, donner un contre-exemple et corriger l'assertion (lorsque c'est possible).

a) Si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $AB = BA$.

$\boxed{\text{FAUX.}}$ De manière générale, deux matrices quelconques **ne commutent pas** : $AB \neq BA$. Par exemple, pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors, on peut calculer que

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{tandis que} \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $(AB)^2 = A^2B^2$.

$\boxed{\text{FAUX.}}$ Par exemple, pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors, on peut calculer que

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{tandis que} \qquad A^2 \times B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction : En fait, de manière générale, pour A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a,

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = ABAB \neq A^2B^2$$

c) Si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0_2$ alors $A = 0$ ou $B = 0$.

$\boxed{\text{FAUX.}}$ Par exemple, pour

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors, on peut calculer que

$$AB = 0_2 \qquad \text{tandis que} \qquad A \neq 0 \text{ et } B \neq 0$$

Correction : Par contre, si A est inversible, alors $AB = 0_2$ implique $B = 0_2$!

d) Si A, B et C sont trois matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = AC$ alors $B = C$.

$\boxed{\text{FAUX.}}$ Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

alors

$$AB = AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{alors que} \qquad B \neq C$$

Correction : Par contre, si A est inversible, alors $AB = AC$ implique $B = C$!

e) Si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $(AB)^\top = A^\top B^\top$.

$\boxed{\text{FAUX.}}$ Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

alors,

$$(AB)^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{alors que} \qquad A^\top B^\top = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction : En fait, si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $(AB)^\top = B^\top \times A^\top$

f) Si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

$\boxed{\text{FAUX.}}$ Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -4 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{alors que} \qquad A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Correction : En fait, si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

g) Si A et B sont deux matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

$\boxed{\text{FAUX.}}$ Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{alors que} \qquad A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction : En fait, si A et B sont deux matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exercice 19 – Oral TSI CCINP 2023. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n. *On pourra montrer qu'il existe deux suites (à déterminer) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = u_n A + v_n I_2$.*

Naturellement, on a envie de poser $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$ (car $A^0 = I_2$) et aussi de poser $u_1 = 1$ et $v_1 = 0$ (car $A^1 = A$). On peut aussi remarquer que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 16 & -36 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = (-4) \times \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (-4) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -4A - 4I_2$$

Donc, on aurait envie de poser $u_2 = -4$ et $v_2 = -4$. De manière générale, soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par récurrence par $\boxed{u_0 = 0,\ v_0 = 1}$ et

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} & = -4u_n + v_n \\ v_{n+1} & = -4u_n \end{cases}}$$

Montrons **par récurrence** que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathscr{P}(n) : «A^n = u_n A + v_n I_2» \qquad \text{est vraie}$$

- *Initialisation.* Montrons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie. D'une part,

$$A^0 = I_2$$

D'autre part,

$$u_0 A + v_0 I_2 = I_2$$

Donc, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, on suppose que

$$A^n = u_n A + v_n I_2$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que

$$A^{n+1} = u_{n+1} A + v_{n+1} I_2$$

On a,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= (u_n A + v_n I_2) \times A \qquad \text{par hyp de rec} \\ &= u_n A^2 + v_n A \\ &= u_n(-4A - 4I_2) + v_n A \qquad \text{d'après le calcul du début} \\ &= -4u_n A - 4u_n I_2 + v_n A \\ &= (-4u_n + v_n)A - 4u_n I_2 \\ &= u_{n+1} A + v_{n+1} I_2 \qquad \text{par construction des deux suites} \end{aligned}$$

Donc, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* D'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = u_n A + v_n I_2}$$

Exercice 20 – Oral MP CCINP 2018. Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = B$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ AB^n - B^n A = nB^n$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } AB^n - B^n A = nB^n \text{ »}$$

est vraie.

- *Initialisation.* Montrons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que $AB^0 - B^0 A = 0 \times B^0$ D'une part,
$$AB^0 - B^0 A = AI_n - I_n A = A - A = 0_n$$
D'autre part, d'après l'énoncé,
$$0 \times B^0 = 0_n$$
Donc la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire que
$$AB^n - B^n A = nB^n$$
Montrons que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que
$$AB^{n+1} - B^{n+1} A = (n+1)B^{n+1}$$
On a,
$$\begin{aligned} AB^{n+1} &= AB^n \times B \\ &= (B^n A + nB^n) \times B \qquad \text{d'après l'hyp de récurrence} \\ &= B^n AB + kB^{n+1} \\ &= B^n(B + BA) + nB^{n+1} \qquad \text{car } AB - BA = B \\ &= B^{n+1} + B^{n+1}A + nB^{n+1} \\ &= (n+1)B^{n+1} + B^{n+1}A \end{aligned}$$
D'où,
$$AB^{n+1} - B^{n+1} A = (n+1)B^{n+1}$$
Donc la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* Donc, par principe de récurrence, on a montré que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad AB^n - B^n A = nB^n}$$

Exercice 21 – Lien avec les suites récurrentes d'ordre 2, Problème Classique. On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

1. (a) Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

On remarque que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_n + v_n \\ 3u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$$

On doit prendre

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}$$

(b) En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathscr{P}(n) : « \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} »$$

est vraie.

- *Initialisation.* Montrons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'une part,

$$A^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'autre part, d'après l'énoncé,

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire que

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Montrons que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} && \text{d'après la question 1a)} \\ &= A \times A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{l'hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

Donc la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* Donc, par principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

2. On note

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

La matrice P est de **taille** 2×2. Son déterminant vaut $\det(P) = -4 \neq 0$ donc la matrice P est $\boxed{\text{inversible}}$ et son inverse vaut

$$\boxed{P^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$$

(b) Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

Par le calcul, on obtient que

$$D = P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

La matrice D est donc $\boxed{\text{diagonale.}}$

(c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de D^n.

La matrice D est donc diagonale. Donc, par une récurrence immédiate, on montre que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}}$$

(d) Montrer que $D = P^{-1}AP$.

On sait que

$$\begin{array}{lll}
 & D = P^{-1}AP & \\
\text{donc} & PD = PP^{-1}AP & \times \text{ à gauche par } P \\
\text{donc} & PD = I_2AP & \\
\text{donc} & PD = AP & \\
\text{donc} & PDP^{-1} = APP^{-1} & \times \text{ à droite par } P^{-1} \\
\text{donc} & \boxed{PDP^{-1} = A} &
\end{array}$$

(e) Montrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathscr{P}(n) : « A^n = PD^nP^{-1} »$$

est vraie.

- *Initialisation.* Montrons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que $A^0 = PD^0P^{-1}$. D'une part $A^0 = I_3$. D'autre part, $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. Donc la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire que

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Montrons que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

En utilisant le fait que $D = P^{-1}AP$ et donc que $A = PDP^{-1}$, on a

$$A^{n+1} = A^n \times A = A^n PDP^{-1}.$$

Puis, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Donc la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* Donc, par principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.}$$

(f) En déduire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1+(-3)^{n+1} & -1+(-3)^n \\ -3-(-3)^{n+1} & -3-(-3)^n \end{pmatrix}$$

D'après les questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{A^n} = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\boxed{= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1+(-3)^{n+1} & -1+(-3)^n \\ -3-(-3)^{n+1} & -3-(-3)^n \end{pmatrix}}$$

après avoir effectué les deux produits matriciels.

(g) En déduire les valeurs de u_n et v_n en fonction de n.

En utilisant les questions 1(b) et 2(e), on obtient,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1+(-3)^{n+1} & -1+(-3)^n \\ -3-(-3)^{n+1} & -3-(-3)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1+(-3)^n \\ -3-(-3)^n \end{pmatrix}$$

Donc, par identification,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\frac{1}{4}(-1+(-3)^n)} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -\frac{1}{4}(-3-(-3)^n)}$$