DM 2

À rendre pour le mardi 4 novembre (facultatif)

Exercice 1 – QCM sur les nombres complexes. Pour chaque question, sélectionner la(les) bonne(s) réponse(s) en **justifiant votre réponse**.

1. Le nombre complexe $\frac{i-1}{i+1}$ vaut

   a) $(i-1)^2$ b) $1^2 - i^2$

   c) $\boxed{i}$ d) $2i$

   On peut calculer que

$$\boxed{\frac{i-1}{i+1}} = \frac{(i-1)(1-i)}{(i+1)(1-i)} = \frac{2i}{2} \boxed{= i}$$

2. Les racines du polynôme $x \mapsto x^2 - 2\cos(\theta)x + 1$ sont

   a) imaginaires pures Vrai si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$... b) $\boxed{e^{i\theta} \text{ et } e^{-i\theta}}$

   c) $\boxed{e^{i\theta} \text{ et } \frac{1}{e^{i\theta}}}$ d) $\cos\theta$ et $\sin\theta$

   D'après les relations coefficients-racines, on sait que, en notant z_1 et z_2 les deux racines complexes du polynôme,

$$z_1 \times z_2 = 1$$
$$z_1 + z_2 = 2\cos(\theta)$$

   Or,

$$e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = e^0 = 1$$
$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \qquad \text{d'après la formule d'Euler}$$

   Ainsi, les nombres complexes $\boxed{e^{i\theta} \text{ et } e^{-i\theta}}$ sont les deux racines du polynôme $x \mapsto x^2 - 2\cos(\theta)x + 1$. De plus,

$$e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

   Donc, on peut aussi dire que les nombres complexes $\boxed{e^{i\theta} \text{ et } \frac{1}{e^{i\theta}}}$ sont les deux racines du polynôme $x \mapsto x^2 - 2\cos(\theta)x + 1$.

3. Si $\omega \in \mathbb{U}_n$ alors

   a) $\boxed{\omega^3 \in \mathbb{U}_{3n}}$ b) $\boxed{\omega^3 \in \mathbb{U}_n}$

   c) $\boxed{\omega^3 \in \mathbb{U}_{\frac{n}{3}} \text{ si } n \text{ est un multiple de } 3}$ d) $\omega^3 = 1$

   On suppose que $\omega \in \mathbb{U}_n$, c'est-à-dire par définition,

$$\omega^n = 1$$

   Alors, on a,

$$(\omega^3)^n = (\omega^n)^3 = 1^3 = 1 \quad \text{donc } \boxed{\omega^3 \in \mathbb{U}_n}$$

   Mais, on a aussi,

$$(\omega^3)^{3n} = (\omega^n)^9 = 1^9 = 1 \quad \text{donc } \boxed{\omega^3 \in \mathbb{U}_{3n}}$$

   Mais, on a aussi,

$$(\omega^3)^{\frac{n}{3}} = \omega^n = 1 \quad \text{donc } \boxed{\omega^3 \in \mathbb{U}_{\frac{n}{3}}}$$

4. L'ensemble des nombres complexes z tels que $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ est décrit par l'équation

a) $|z+1| = |z-i|$

b) $\boxed{|z-1| = |z-i|}$

c) $\boxed{|z+1| = |z+i|}$

d) $|z-1| = |z+i|$

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{|z-1| = |z-i|} \quad &\Longleftrightarrow \quad |z-1|^2 = |z-i|^2 \qquad \text{car les qtés sont >0} \\
&\Longleftrightarrow \quad |a+ib-1|^2 = |a+ib-i|^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad |a-1+ib|^2 = |a+i(b-1)|^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad (a-1)^2 + b^2 = a^2 + (b-1)^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad a^2 - 2a + 1 + b^2 = a^2 + b^2 - 2b + 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad a = b \\
&\boxed{\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)}
\end{aligned}$$

On peut montrer de même que, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{|z+1| = |z+i| \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)}$$

Exercice 2 – Nombres complexes. On considère les nombres complexes

$$z_1 = 1 + i \qquad z_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + i\sqrt{2}) \qquad \text{et} \qquad Z = z_1 z_2$$

1. Donner la forme algébrique de Z.

   Calculons Z. On a,

$$\begin{aligned} Z &= z_1 z_2 \\ &= (1+i)\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}+i\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

   Ainsi, la forme algébrique de Z est donnée par

$$\boxed{Z = \tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$$

2. Déterminer une forme trigonométrique pour chacun des complexes z_1, z_2 et Z.

   Calculons une forme trigonométrique de z_1, z_2 et Z. On a

$$\boxed{z_1} = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \boxed{= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

   De plus,

$$|z_2| = \left|\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{6+2} = \frac{1}{2}2\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

   Dès lors,

$$\boxed{z_2} = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \boxed{= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

   Enfin,

$$\boxed{Z} = z_1 z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{12}+\frac{2\pi}{12}\right)} \boxed{= 2e^{i\frac{5\pi}{12}}}$$

3. En utilisant les deux manières d'écrire le nombre complexes Z, en déduire les valeurs de

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

   Par les deux précédentes questions, on a

$$Z = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} = 2e^{i\frac{5\pi}{12}} = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + 2i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

   Par unicité de la forme algébrique, on en déduit que

$$\begin{cases} 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

   et donc,

$$\boxed{\begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}. \end{cases}}$$

4. En déduire qu'il existe A et φ deux réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\sin(x) = A\cos(x-\varphi)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la question précédente, on a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\tfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\cos(x) - \tfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\sin(x)} &= -\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin(x) \\
&= -\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin(x)\right] \\
&= -\cos\left(\frac{5\pi}{12} - x\right) \\
&\boxed{= -\cos\left(x - \tfrac{5\pi}{12}\right)} \qquad \text{par parité du cosinus} \\
&= A\cos(x-\varphi)
\end{aligned}$$

avec $A = -1$ et $\varphi = \frac{5\pi}{12}$.

5. En déduire les solutions de l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E) \qquad \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\sin(x) = \frac{\sqrt{12}}{4}$$

En utilisant la question précédente on a,

$$\begin{aligned}
(E) \iff& \quad -\cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\iff& \quad \cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\iff& \quad \cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\
\iff& \quad x - \frac{5\pi}{12} \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x - \frac{5\pi}{12} \equiv -\frac{5\pi}{6}[2\pi] \\
\iff& \quad x \equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{5\pi}{12}[2\pi].
\end{aligned}$$

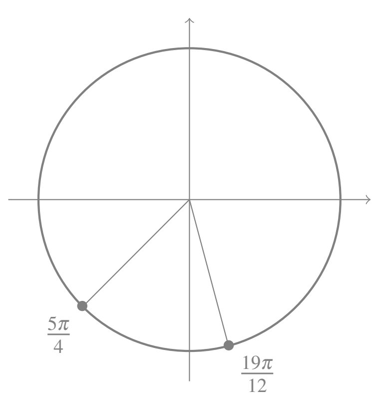
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\tfrac{5\pi}{4} + 2k\pi ; -\tfrac{5\pi}{12} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

6. Préciser les solutions qui sont dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ et les représenter sur le cercle trigonométrique.

D'après la question précédente, les solutions dans $[0, 2\pi[$, sont

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi[} = \left\{\tfrac{5\pi}{4}, \tfrac{19\pi}{12}\right\}}$$



Exercice 3 – Calcul d'une somme. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} (k \times k!)$.

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.

On a,

$$\boxed{S_1} = \sum_{k=1}^{1} (k \times k!) = 1 \times 1! \boxed{= 1}$$
$$\boxed{S_2} = \sum_{k=1}^{2} k \times k! = 1 \times 1! + 2 \times 2! = 1 + 2 \times 2 \boxed{= 5}$$
$$\boxed{S_3} = \sum_{k=1}^{k=1} kk! = 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! = 1 + 4 + 3 \times 1 \times 2 \times 3 \boxed{= 23}$$

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$k \times k! = (k+1)! - k!$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a:

$$\begin{aligned}\boxed{(k+1)! - k!} &= (k+1) \times k! - k! \\ &= k! \times (k + 1 - 1) \\ &= k! \times k \\ &\boxed{= k \times k!}\end{aligned}$$

3. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}\boxed{S_n} &= \sum_{k=1}^{n} k \times k! \\ &= \sum_{k=1}^{n} [(k+1)! - k!] \quad \text{en utilisant la question 2} \\ &= 2! - 1! + 3! - 2! + 1 \cdots + (n+1)! - n! \\ &= (n+1)! - 1! \quad \text{(télescopage)} \\ &\boxed{= (n+1)! - 1}\end{aligned}$$

4. Vérifier que la formule donnée en Question 3 coincide avec les résultats de la Question 1.

Avec la formule de la question 3, on obtient

$$\begin{aligned}S_1 &= (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1 \\ S_2 &= (2+1)! - 1 = 3! - 1 = 6 - 1 = 5 \\ S_3 &= (3+1)! - 1 = 4! - 1 = 24 - 1 = 23\end{aligned}$$

Cela $\boxed{\text{coincide}}$ avec les résultats obtenus en question 1.