11. Intégration sur un segment

Pour bien démarrer : connaître les primitives usuelles

Fonction	Une primitive
$x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \neq 0$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(\lvert x\rvert)$
$x \mapsto \exp(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{a}\exp(ax)$
$x \mapsto \cos(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax)$
$x \mapsto \sin(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax)$
$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$

Fonction	Une primitive
$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto x\ln(x) - x$
$x \mapsto 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto -\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arcsin(x)$

Fonction	Une primitive
$u'\exp(u)$	$\exp(u)$
$u'u^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$

Fonction	Une primitive
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définition de l'intégrale sur un segment

Définition 1.1 Soit f une fonction **continue** sur le **segment** $[a,b]$. L'**intégrale** de f sur $[a,b]$ est le nombre

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f sur $[a,b]$. Ce nombre ne dépend pas du choix de la primitive.

Ainsi, dans son essence, savoir calculer une *intégrale* revient à savoir calculer une *primitive*. Il est donc nécessaire de connaître les primitives usuelles.

Quelques remarques concernant cette notion d'intégration sur un segment.

- La variable d'intégration est muette :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\star)\,\mathrm{d}\star$$

- Lorsque les bornes de l'intégrale sont les mêmes, on pose

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

- Dans la définition de l'intégrale, la borne du bas est forcément un nombre réel plus petit que la borne du haut. Si ce n'est pas le cas, par convention, on pose que

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$$

- Si f est une fonction à valeurs complexes, on définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par le nombre

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,\mathrm{d}x + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,\mathrm{d}x$$

Exemple 1.2 Justifier que l'intégrale $I = \int_1^2 (2x-3)\,\mathrm{d}x$ est bien définie et la calculer.

Exemple 1.3 Calculer les intégrales suivantes.

$\int_1^4 2x\,\mathrm{d}x =$

$\int_{-1}^3 1\,\mathrm{d}x =$

$\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x =$

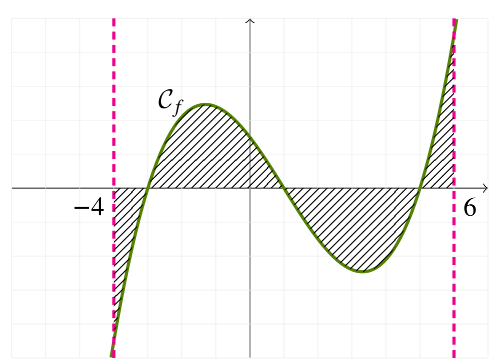
$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x =$

$\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x =$

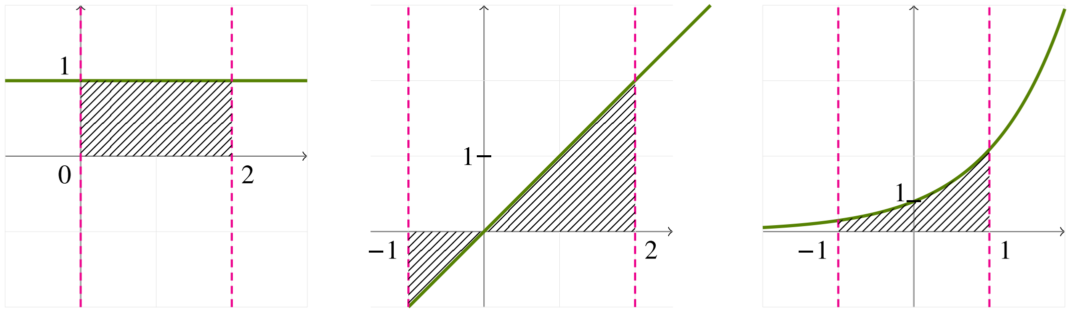
1.1 Interprétation graphique

L'intégrale d'une fonction **continue** sur un **segment** s'interprète comme **l'aire algébrique** du plan situé entre la courbe de la fonction f sur $[a,b]$ et l'axe des abscisses et délimité par les droites verticales d'abscisses a et b.De plus, cette aire est comptée positivement pour la partie située au dessus de l'axe des abscisses et négativement pour la partie située en dessous. (La construction précise de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment sera vue au second semestre.)



Ci-contre est représenté le calcul de l'intégrale suivante :

$$\int_{-4}^{6} (x+3)(x-1)(x-5)\,\mathrm{d}x = 0$$



Cette interprétation de l'intégrale comme une aire est cependant restreinte. En effet, bien qu'on sache calculer l'aire d'un rectangle ou d'un triangle, de manière générale, on ne sait pas calculer de manière exacte l'aire d'un domaine quelconque. Cependant, cette vision de l'intégrale est à garder en tête car elle permet de comprendre certaines propriétés.

1.2 Propriétés de l'intégrale

Proposition 1.4 — Linéarité de l'intégrale. Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$ et λ,μ des réels. On a,

$$\int_a^b (\lambda f(x)+\mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Cette propriété était déjà connue au niveau des primitives : pour calculer la primitive d'une somme, il suffit de primitiver chacun des termes de la somme.

Exemple 1.5 Calculer l'intégrale suivante.

$$I = \int_{-1}^{0}\left(3x^4 - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$$

! Le calcul d'intégrale (comme le calcul de primitive) se marie bien avec la somme, mais pas avec les multiplications. De manière générale,

$$\int_a^b f(x) \times g(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \times \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Par exemple,

$$\int_0^1 x \times x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \quad \text{alors que} \quad \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \times \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \times \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

Proposition 1.6 — Relation de Chasles. Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et $c \in [a,b]$. Alors,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Interprétation géométrique.

La relation de Chasles s'utilise généralement dans deux cas.

- Si l'expression de la fonction intégrée fait intervenir des *valeurs absolues* : dans ce cas, on découpe l'intégrale sur les segments sur lesquels la quantité dans la valeur absolue est positive et ceux où elle est négative.
- Si l'*expression* de la fonction intégrée *change* sur l'intervalle considéré.

Exemple 1.7 Calculer l'intégrale $I = \int_0^3 |x-1|\,\mathrm{d}x$.

1.3 Passage d'une inégalité dans une intégrale

Proposition 1.8 Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$.

1. **Positivité de l'intégrale**

$$\underline{\text{Si}} \quad \forall x \in [a,b], f(x) \geqslant 0 \quad \underline{\text{alors}} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

2. **Croissance de l'intégrale**

$$\underline{\text{Si}} \quad \forall x \in [a,b], f(x) \leqslant g(x) \quad \underline{\text{alors}} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Interprétation géométrique.

Exemple 1.9 Comparer les deux intégrales suivantes (sans les calculer) :

$$I_1 = \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_0^1 x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Exemple 1.10 Donner le signe de l'intégrale suivante (sans la calculer).

$$I = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

2 Techniques de calcul intégral

2.1 À l'oeil

La première méthode pour calculer une intégrale de la forme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ consiste à

- Déterminer une primitive F de f sur $[a,b]$
- Puis d'utiliser la formule

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

C'est la première méthode à tester. Si on ne trouve pas de *primitive* de f, alors seulement, on essaye d'appliquer les méthodes suivantes, d'*intégration par parties* et de *changement de variables*.

Exemple 2.1 — Reconnaissance de primitives usuelles.

$$\int_0^1 5x^3\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-1}^2 \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x =$$

Exemple 2.2 — Reconnaissance de formes composées (avec/sans forçage).

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \times \ln(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$$

! Lorsque l'on intègre une **fraction rationnelle** de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

trouver une primitive n'est pas immédiat. Il faut commencer par s'intéresser au le dénominateur et...

- ...si le dénominateur admet deux racines réelles distinctes, on le factorise, on effectue une décomposition en éléments simples de la fraction, puis on primitive la fraction (v1) ;
- ...si le dénominateur admet une unique racine réelle, on le factorise puis on trouve une primitive de la fraction (v2) ;
- ...si le dénominateur n'admet pas de racine réelle, on le met sous forme canonique puis on trouve une primitive de la fraction (v3).

Exemple 2.3 — Fractions rationnelles v1. Calculer $I = \int_2^4 \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$.

Exemple 2.4 — Fractions rationnelles v2. Calculer $I = \int_0^3 \frac{\mathrm{d}t}{4t^2+4t+1}$.

Exemple 2.5 — Fractions rationnelles v3. Calculer $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$.

Pour primitiver une fonction de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$, on remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{e}^{ax}\cos(bx) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(a+ib)x}\right) \qquad \text{ou} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{e}^{ax}\cos(bx) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(a+ib)x}\right)$$

Puis, on calcule une primitive de la fonction exponentielle (complexe) et on en prend sa partie réelle.

Exemple 2.6 Calculer

$$I = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin(2x)\,\mathrm{d}x$$

2.2 Changement de variables

Proposition 2.7 Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et a, b dans J. Alors

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

Exemple 2.8 Calculer $I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x(1+(\ln x)^2)}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variables $t = \ln(x)$.

Exemple 2.9 Calculer $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variables $x = \sin(t)$.

2.3 Intégration par parties

Proposition 2.10 Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur le segment $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Ce résultat permet de calculer des primitives/intégrales de produits. Il y a toujours deux possibilités pour effectuer une IPP, mais souvent une seule est efficace. L'objectif est de se ramener à une intégrale que l'on sait facilement calculer. Par exemple, pour calculer l'intégrale d'une fonction de la forme $x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{ax}$ ou $x \mapsto P(x)\cos(ax)$ ou $x \mapsto P(x)\sin(ax)$ avec P une fonction polynomiale, on effectue des intégrations par parties successives en dérivant successivement le polynôme P jusqu'à aboutir à une intégrale que l'on sait calculer.

Exemple 2.11 Calculer $I = \int_0^1 t\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 2.12 Calculer $I = \int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x$.

3 Théorème fondamental du calcul intégral

Proposition 3.1 — Théorème fondamental du calcul intégral. Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Alors la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur $[a,b]$ et vérifie

$$F(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [a,b],\ F'(x) = f(x).$$

Autrement dit, F est l'unique primitive de f sur $[a,b]$ s'annulant en a.

! On pourra utiliser la notation $x \mapsto \int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour désigner une primitive quelconque de f.

Ce résultat nous permet de calculer des primitives en s'appuyant sur les techniques de calcul intégral.

Exemple 3.2 On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \int_0^x \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

Exemple 3.3 Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{(2t-1)^3}$ sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$. *On pourra s'aider du changement de variables* $u = 2t - 1$.

Exemple 3.4 Calculer la primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.