

TD 11 – Intégration sur un segment

Exercice 1 – Reconnaissance de primitives immédiates. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^2 \frac{x^2}{3} dx$
2. $\int_{-1}^0 (x^2 + x + 1) dx$
3. $\int_{-1}^0 e^x dx$
4. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(x) dx$
5. $\int_{-1}^2 -4d\theta$
6. $\int_1^e \frac{1}{t} dt$
7. $\int_0^\pi \cos(s) ds$
8. $\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{u}} du$

Exercice 2 – Reconnaissance de formes composées. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_4^5 \frac{1}{3-t} dt$
2. $\int_1^2 \frac{1}{u} du$
3. $\int_0^4 t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$
4. $\int_1^2 (3x-1)^2 dx$
5. $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$
6. $\int_e^{e^2} \frac{1}{t \sqrt{\ln(t)}} dt$

Exercice 3 – Lien avec l'aire algébrique. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = |x - 1|$$

1. Représenter la courbe de la fonction f sur le segment $[0, 2]$.
2. Calculer l'aire algébrique du plan situé entre la courbe de la fonction f sur $[0, 2]$, l'axe des abscisses et délimité par les droites verticales d'abscisses 0 et 2.
3. Calculer

$$\int_0^2 f(x) dx$$

La valeur obtenue coïncide-t-elle avec le résultat de la question précédente ?

Exercice 4 – Relation de Chasles. Calculer les intégrales suivantes.

- a) $\int_{-2}^3 |x+1| dx$
- b) $\int_{-1}^2 x|x| dx$
- c) $\int_{-1}^2 \max(1, e^x) dx$

Exercice 5 – Intégrales de fonctions trigonométriques et hyperboliques. Calculer les intégrales suivantes.

- a) $\int_0^\pi \sin^4(x) dx$
- b) $\int_0^1 \operatorname{sh}^4(x) dx$
- c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^2(x) dx$

Exercice 6 – Primitives de fonctions trigonométriques et hyperboliques. Calculer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

- a) $x \mapsto \cos^2(3x)$ sur $\mathbb{R}$
- b) $x \mapsto \sin(3x) \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$
- c) $x \mapsto e^x \operatorname{ch}(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 7 – Intégrales de produit $\exp \times \cos$ ou $\exp \times \sin$. Calculer les deux intégrales suivantes.

1. $\int_0^\pi e^x \cos(3x) dx$
2. $\int_0^\pi e^{2x} \sin(3x) dx$

Exercice 8 – Intégrales avec décomposition en éléments simples.

1. (a) Donner les racines du polynôme $t \mapsto t^2 - 3t + 2$ et sa forme factorisée.
- (b) Déterminer deux réels a et b tels que,

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}, \quad \frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t-2}.$$

- (c) En déduire la valeur de

$$\int_3^4 \frac{2}{t^2 - 3t + 2} dt$$

2. Sur le même modèle calculer les intégrales suivantes:

- a) $\int_0^1 \frac{4}{t^2 - 4} dt$
- b) $\int_2^3 \frac{2}{t^2 - t} dt$
- c) $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 4t + 3} dt$

3. (a) Déterminer trois réels a , b et c tels que,

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, \quad \frac{2}{t(t^2 - 1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}.$$

- (b) En déduire la valeur de

$$\int_2^4 \frac{2}{t(t^2 - 1)} dt \quad \text{et} \quad \int_{-3}^{-2} \frac{2}{t(t^2 - 1)} dt$$

Exercice 9 – Intégrales avec forme canonique.

1. (a) Mettre, pour tout $x \in \mathbb{R}$, sous forme canonique l'expression $x^2 + 2x + 1$.
- (b) En déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + 2t + t^2} dt$$

2. En utilisant la même méthode, en déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_1^x \frac{1}{u^2 - 2u + 2} du$$

Exercice 10 – Intégrales avec factorisation.

- (a) Trouver l'unique racine du polynôme $x \mapsto 4x^2 + 8x + 4$ et en déduire sa forme factorisée.
- (b) En déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{1}{4x^2 + 8x + 4} dx$$

- En utilisant la même méthode, en déduire la valeur de

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{u^2 - 6u + 9} du$$

Exercice 11 – Intégration par parties. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, les intégrales suivantes.

- $\int_0^1 t \exp(-2t) dt$
- $\int_0^1 (1-t) e^{4t} dt$
- $\int_1^{e^2} (2x^3 + 1) \ln(x) dx$

Exercice 12 – Intégration par parties & Primitives. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

- $f : t \mapsto (2t + 1) \exp(3t)$ sur $\mathbb{R}$
- $g : t \mapsto t \sin(2t)$ sur $\mathbb{R}$
- $h : t \mapsto t^2 \ln(t)$ sur $]0, +\infty[$

Exercice 13 – Intégration par parties. Calculer, à l'aide de deux intégrations par parties successives, les intégrales suivantes,

$$1. \int_0^1 (t^2 + 1) e^t dt \quad 2. \int_1^2 (\ln(x))^2 dx$$

Exercice 14 – Changement de variables «dans le bon sens». Calculer, à l'aide d'un changement de variables indiqué, les intégrales suivantes.

- $\int_1^e \frac{1}{t \sqrt{\ln(t) + 1}} dt$ en posant $u = \ln(t)$
- $\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x} dx$ en posant $t = e^x$
- $\int_1^2 \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx$ en posant $t = x^2$

Exercice 15 – Changement de variables «dans le mauvais sens». Calculer, à l'aide d'un changement de variables indiqué, les intégrales suivantes.

- $\int_{-1}^0 (x-2)(x+1)^5 dx$ en posant « $x = t - 1$ »
- $\int_2^3 \frac{1}{t \sqrt{t(t-1)}} dt$ en posant « $t = \frac{1}{u}$ »
- $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$ en posant « $x = 1 + \sin(t)$ »

Exercice 16 – Changement de variables & Primitives. Calculer, à l'aide du changement de variables indiqué, une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

- $f : r \mapsto \frac{r}{(1+r^2)^3}$ sur $\mathbb{R}$ en posant « $u = 1 + r^2$ »
- $g : t \mapsto \frac{3t}{t^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ en posant « $x = 1 + t^2$ »
- $h : t \mapsto \frac{\cos(t)}{(1-\sin(t))^3}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ en posant « $u = \cos(t)$ »

Exercice 17 – Type problème. On considère, la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$$

- Calculer I_0 .
- À l'aide d'une intégration par parties, montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} I_n$$

- En déduire la valeur de I_1 et I_2 .

Exercice 18 – Type problème. On considère, la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_1^e x (\ln(x))^n dx$$

- Calculer I_0 et I_1
- À l'aide d'une intégration par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n .
- En déduire la valeur de I_2 .

Exercice 19 – Oral MP CCINP 2023. Soient a et b deux réels strictement positifs. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_a^b \frac{1}{t^{3/2} + t^{1/2}} dt$$

Indication : On pourra utiliser le changement de variables « $u = \sqrt{t}$ ».

Exercice 20 – Oral PC CCINP 2022. On considère les deux intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{(\sin(x) + \cos(x))^2} dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{(\sin(x) + \cos(x))^2} dx$$

- Justifier que les deux intégrales existent.
- Montrer que $I = J$.
- Le but de cet exercice est de calculer $I + J$.

(a) Montrer que

$$I + J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin(u)} du$$

(b) Montrer que

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \sin(x) = \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}$$

- En déduire, grâce au changement de variables $t = \tan(u/2)$ que

$$I + J = \int_{\tan(\pi/8)}^{\tan(3\pi/8)} \frac{1}{t} dt$$

(d) En déduire la valeur de $I + J$.

- En déduire la valeur de I et J .