

TD 11 – Intégration sur un segment

Exercice 1 – Reconnaissance de primitives immédiates. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^2 \frac{x^2}{3} dx = \frac{8}{9}$

5. $\int_{-1}^2 -4d\theta = -12$

2. $\int_{-1}^0 (x^2 + x + 1) dx = \frac{5}{6}$

6. $\int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$

3. $\int_{-1}^0 e^x dx = 1 - e^{-1}$

7. $\int_0^\pi \cos(s) ds = 0$

4. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(x) dx = 0$

8. $\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{u}} du = 18$

Exercice 2 – Reconnaissance de formes composées. Calculer les intégrales suivantes.

$$\text{a) } \int_4^5 \frac{1}{3-t} dt = [-\ln(|3-t|)]_4^5 = -\ln(|-2|) + \ln(|-1|) \boxed{= -\ln(2)}$$

$$\text{b) } \int_1^2 \frac{1}{u} du = [\ln(|u|)]_1^2 = \ln(|2|) - \ln(|1|) \boxed{= \ln(2)}$$

$$\text{c) } \int_0^4 t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^4 = -e^{-8} + e^0 \boxed{= 1 - e^{-8}}$$

$$\text{d) } \int_1^2 (3x-1)^2 dx = \left[\frac{1}{9} (3x-1)^3 \right]_1^2 = \frac{5^3}{9} - \frac{2^3}{9} \boxed{= 13}$$

$$\text{e) } \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = [x - \ln(|x+1|)]_0^1 = 1 - \ln(2) - (0 - \ln(1)) \boxed{= 1 - \ln(2)}$$

$$\text{f) } \int_e^{e^2} \frac{1}{t \sqrt{\ln(t)}} dt = \int_e^{e^2} \frac{1}{t} [\ln(t)]^{-\frac{1}{2}} dt = \left[2 \ln(t)^{\frac{1}{2}} \right]_e^{e^2} = 2 \sqrt{\ln(e^2)} - 2 \sqrt{\ln(e)} = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{1} \boxed{= 2\sqrt{2} - 2}$$

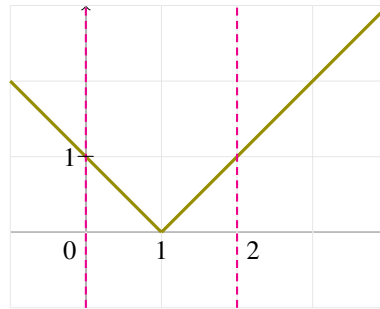
Exercice 3 – Lien avec l'aire algébrique. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = |x - 1|$$

1. Représenter la courbe de la fonction f sur le segment $[0, 2]$.

Pour représenter la fonction f , on peut commencer par remarquer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$



2. Calculer l'aire algébrique du plan situé entre la courbe de la fonction f sur $[0, 2]$, l'axe des abscisses et délimité par les droites verticales d'abscisses 0 et 2.

Pour calculer l'aire algébrique demandée, on peut remarquer que la surface est constituée de deux rectangles. Ainsi, cette aire algébrique est donnée par

$$\frac{1 \times 1}{2} + \frac{1 \times 1}{2} \boxed{= 1}$$

3. Calculer

$$\int_0^2 f(x) dx$$

La valeur obtenue coïncide-t-elle avec le résultat de la question précédente ?

En utilisant la relation de Chasles, on obtient que

$$\begin{aligned} \boxed{\int_0^2 f(x) dx} &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_0^1 (-x + 1) dx + \int_1^2 (x - 1) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{2} + 1 - 0 + \frac{1}{2}2^2 - 2 - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \\ &\boxed{= 1} \end{aligned}$$

Exercice 4 – Relation de Chasles. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-2}^3 |x+1| dx$

Pour calculer cette intégrale, on peut commencer par remarquer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \boxed{\int_{-2}^3 |x+1| dx} &= \int_{-2}^{-1} |x+1| dx + \int_{-1}^3 |x+1| dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (-x-1) dx + \int_{-1}^3 (x+1) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 - x \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^3 \\ &= \frac{1}{2} + 8 \\ &\boxed{= \frac{17}{2}} \end{aligned}$$

b) $\int_{-1}^2 x|x| dx$

De même,

$$\boxed{\int_{-1}^2 x|x| dx} = \int_{-1}^0 (-x^2) dx + \int_0^2 x^2 dx = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} \boxed{= \frac{7}{3}}$$

c) $\int_{-1}^2 \max(1, e^x) dx$

On peut commencer par remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x \geq 1 \iff x \geq \ln(1) \iff x \geq 0$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \max(1, e^x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ainsi, en utilisant la relation de Chasles, on obtient,

$$\begin{aligned} \boxed{\int_{-1}^2 \max(1, e^x) dx} &= \int_{-1}^0 \max(1, e^x) dx + \int_0^2 \max(1, e^x) dx \\ &= \int_{-1}^0 1 dx + \int_0^2 e^x dx \\ &= [x]_{-1}^0 + [e^x]_0^2 \\ &= 0 - (-1) + e^2 - e^0 \\ &\boxed{= e^2} \end{aligned}$$

Exercice 5 – Intégrales de fonctions trigonométriques et hyperboliques. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^\pi \sin^4(x) dx = \frac{3\pi}{8}$

Pour calculer cette intégrale, il faut commencer par **linéariser**, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^4(x)$ (cf Chapitre 6, Section 3.1). Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}\sin^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 \\ &= \frac{1}{16} [e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{-i4x}] \\ &= \frac{1}{16} [e^{i4x} + e^{-i4x} - 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6] \\ &= \frac{1}{16} [2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6] \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\boxed{\int_0^\pi \sin^4(x) dx} &= \int_0^\pi \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x) \right) dx \\ &= \frac{3}{8} \int_0^\pi 1 dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(2x) dx + \frac{1}{8} \int_0^\pi \cos(4x) dx \\ &= \frac{3}{8} [x]_0^\pi - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^\pi + \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4} \sin(4x) \right]_0^\pi \\ &= \frac{3}{8} \times \pi - \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{8} \times 0 \\ &\boxed{= \frac{3\pi}{8}}\end{aligned}$$

b) $\int_0^1 \text{sh}^4(x) dx$

Pour calculer cette intégrale, il faut commencer par **linéariser**, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{sh}^4(x)$. Pour cela, on suit une méthode très similaire à celle utilisée pour linéariser le sinus trigonométrique. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned} \text{sh}^4(x) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{1}{16} [e^{4x} - 4e^{2x} + 6 - 4e^{-2x} + e^{-4x}] \\ &= \frac{1}{16} [e^{4x} + e^{-4x} - 4(e^{2x} + e^{-2x}) + 6] \\ &= \frac{1}{16} [2\text{ch}(4x) - 8\text{ch}(2x) + 6] \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\text{ch}(2x) + \frac{1}{8}\text{ch}(4x) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \boxed{\int_0^1 \text{sh}^4(x) dx} &= \int_0^1 \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\text{ch}(2x) + \frac{1}{8}\text{ch}(4x) \right) dx \\ &= \frac{3}{8} \int_0^1 1 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \text{ch}(2x) dx + \frac{1}{8} \int_0^1 \text{ch}(4x) dx \\ &= \frac{3}{8} [x]_0^1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \text{sh}(2x) \right]_0^1 + \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4} \text{sh}(4x) \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{8} \times (1 - 0) - \frac{1}{4} (\text{sh}(2) - \text{sh}(0)) + \frac{1}{32} (\text{sh}(4) - \text{sh}(0)) \\ &= \boxed{\frac{3}{8} - \frac{1}{4} \text{sh} 2 + \frac{1}{32} \text{sh} 4} \end{aligned}$$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^2(x) dx$

Pour calculer cette intégrale, on commence par **linéariser** la fonction intégrée. On peut montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^2(x) \cos^2(x) = \frac{1}{8} (1 - \cos(4x))$$

Puis, on en déduit que

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^2(x) dx = \frac{\pi}{16}}$$

Exercice 6 – Primitives de fonctions trigonométriques et hyperboliques. Calculer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

a) $x \mapsto \cos^2(3x)$ sur $\mathbb{R}$

Une primitive de la fonction $t \mapsto \cos^2(3t)$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction

$$x \mapsto \int_0^x \cos^2(3t) dt$$

Pour calculer cette intégrale, on peut utiliser la formule de **linéarisation** qui donne que,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(3t) = \frac{\cos(6t) + 1}{2}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x \cos^2(3t) dt = \int_0^x \frac{\cos(6t) + 1}{2} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} \sin(6t) \right]_0^x + \frac{1}{2} [t]_0^x = \frac{1}{12} \sin(6x) + \frac{1}{2} x$$

Ainsi, on trouve qu'une primitive de $x \mapsto \cos^2(3x)$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction

$$x \mapsto \frac{\sin(6x)}{12} + \frac{x}{2}$$

b) $x \mapsto \sin(3x)\cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$

Une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(3t)\cos(2t)$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction

$$x \mapsto \int_0^x \sin(3t)\cos(2t) dt$$

Or, d'après les formules de trigonométrie, on sait que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin(3t)\cos(2t) = \frac{1}{2}(\sin(3t+2t) + \sin(3t-2t)) = \frac{1}{2}(\sin(5t) + \sin(t))$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x \sin(3t)\cos(2t) dt = \int_0^x \frac{1}{2}(\sin(5t) + \sin(t)) dt = \dots = -\frac{1}{10} \cos(5x) - \frac{1}{2} \cos(x)$$

Ainsi, on trouve qu'une primitive de $x \mapsto \sin(3x)\cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction

$$x \mapsto -\frac{1}{10} \cos(5x) - \frac{1}{2} \cos(x)$$

c) $x \mapsto e^x \operatorname{ch}(x)$ sur $\mathbb{R}$

En utilisant que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \operatorname{ch}(x) = \frac{e^{2x} + 1}{2}$$

on trouve qu'une primitive de $x \mapsto e^x \operatorname{ch}(x)$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction

$$x \mapsto \frac{e^{2x}}{4} + \frac{x}{2}$$

Exercice 7 – Intégrales de produit $\exp \times \cos$ ou $\exp \times \sin$. Calculer les deux intégrales suivantes.

a) $\int_0^\pi e^x \cos(3x) dx$

Pour calculer cette intégrale, on utilise le fait que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \cos(3x) = e^x \times \operatorname{Re}(e^{i3x}) = \operatorname{Re}(e^x \times e^{i3x}) = \operatorname{Re}(e^{(1+3i)x})$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \boxed{\int_0^\pi e^x \cos(3x) dx} &= \operatorname{Re} \left(\int_0^\pi e^{(1+3i)x} dx \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\left[\frac{1}{1+3i} e^{(1+3i)x} \right]_0^\pi \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1+3i} (e^{(1+3i)\pi} - 1) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1-3i}{10} (e^{(1+3i)\pi} - 1) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1-3i}{10} (e^\pi \cos(3\pi) + ie^\pi \sin(3\pi) - 1) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1-3i}{10} (-e^\pi - 1) \right) \\ &= \boxed{\frac{1}{10} (-e^\pi - 1)} \end{aligned}$$

b) $\int_0^\pi e^{2x} \sin(3x) dx$

De même, on montre que

$$\boxed{\int_0^\pi e^{2x} \sin(3x) dx = \frac{3}{13} (1 + e^{2\pi})}$$

Exercice 8 – Intégrales avec décomposition en éléments simples.

1. (a) Donner les racines du polynôme $t \mapsto t^2 - 3t + 2$ et sa forme factorisée.

On peut remarquer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$$

Ainsi, le polynôme $t \mapsto t^2 - 3t + 2$ admet deux racines réelles qui sont $\boxed{1 \text{ et } 2}$. (Pour trouver ses racines, on peut aussi utiliser la méthode du discriminant).

- (b) Déterminer deux réels a et b tels que,

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}, \quad \frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t-2}.$$

- En multipliant toute l'égalité par $t-1$ et en évaluant en $t=1$, on trouve, $a = -1$.
- En multipliant toute l'égalité par $t-2$ et en évaluant en $t=2$, on trouve, $b = 1$.

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}, \quad \frac{1}{(t-1)(t-2)} = -\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-2}.$$

- (c) En déduire la valeur de

$$\int_3^4 \frac{2}{t^2 - 3t + 2} dt$$

En utilisant l'égalité précédente, on obtient,

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{2}{t^2 - 3t + 2} dt &= \int_3^4 \left(-\frac{2}{t-1} + \frac{2}{t-2} \right) dt \\ &= -\int_3^4 \frac{2}{t-1} dt + \int_3^4 \frac{2}{t-2} dt \\ &= -[2 \ln(|t-1|)]_3^4 + [2 \ln(|t-2|)]_3^4 \\ &= -(2 \ln(3) - 2 \ln(2)) + 2 \ln(2) - 2 \ln(1) \\ &= \boxed{4 \ln(2) - 2 \ln(3)} \end{aligned}$$

2. Sur le même modèle calculer les intégrales suivantes:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{4}{t^2 - 4} dt = \int_0^1 \frac{4}{(t-2)(t+2)} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \boxed{-\ln(3)}$$

$$\text{b) } \int_2^3 \frac{2}{t^2 - t} dt = \int_2^3 \frac{2}{t(t-1)} dt = \int_2^3 \left(\frac{2}{t-1} - \frac{2}{t} \right) dt = \boxed{4 \ln(2) - 2 \ln(3)}$$

$$\text{c) } \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 4t + 3} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{t+3} \right) dt = \boxed{\frac{1}{2} (\ln(3) - \ln(2))}$$

3. (a) Déterminer trois réels a , b et c tels que,

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, \quad \frac{2}{t(t^2 - 1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}.$$

On trouve $\boxed{a = -2, b = 1 \text{ et } c = 1}$.

- (b) En déduire la valeur de

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{2}{t(t^2 - 1)} dt &= \ln(5) - 2 \ln(2) \\ \int_{-3}^{-2} \frac{2}{t(t^2 - 1)} dt &= -5 \ln(2) + 3 \ln(3) \end{aligned}$$

Exercice 9 – Intégrales avec forme canonique.

1. (a) Mettre, pour tout $x \in \mathbb{R}$, sous forme canonique l'expression $x^2 + 2x + 1$.

On reconnaît directement une identité remarquable :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2}$$

- (b) En déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + 2t + t^2} dt$$

En utilisant l'égalité précédente, on obtient,

$$\begin{aligned} \boxed{\int_0^1 \frac{1}{1 + 2t + t^2} dt} &= \int_0^1 \frac{1}{(t + 1)^2} dt \\ &= \int_0^1 (t + 1)^{-2} dt \\ &= \left[\frac{(t + 1)^{-1}}{-1} \right]_0^1 \\ &= \left[-\frac{1}{t + 1} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} + 1 \\ &\boxed{= \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2. En utilisant la même méthode, en déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_1^x \frac{1}{u^2 - 2u + 2} du$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. En mettant sous forme canonique le dénominateur, on obtient,

$$\begin{aligned} \boxed{\int_1^x \frac{1}{u^2 - 2u + 2} du} &= \int_1^x \frac{1}{(u - 1)^2 + 1} du \\ &= [\arctan(u - 1)]_1^x \\ &= \arctan(x - 1) - \arctan(0) \\ &\boxed{= \arctan(x - 1)} \end{aligned}$$

Exercice 10 – Intégrales avec factorisation.

1. (a) Trouver l'unique racine du polynôme $x \mapsto 4x^2 + 8x + 4$ et en déduire sa forme factorisée.

On peut directement remarquer une identité remarquable :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 4x^2 + 8x + 4 = (2x + 2)^2$$

Ainsi, le polynôme $x \mapsto 4x^2 + 8x + 4$ admet une unique racine qui vaut -1 . (On peut aussi passer par la méthode du discriminant pour trouver tout cela...)

- (b) En déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{1}{4x^2 + 8x + 4} dx$$

En utilisant l'égalité précédente, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{4x^2 + 8x + 4} dx &= \int_0^1 \frac{1}{(2x + 2)^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{2x + 2} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

2. En utilisant la même méthode, en déduire la valeur de

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{u^2 - 6u + 9} du$$

On a,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{u^2 - 6u + 9} du &= \int_{-1}^1 \frac{1}{(u - 3)^2} du \\ &= \left[-\frac{1}{u - 3} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Exercice 11 – Intégration par parties. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 t \exp(-2t) dt$

Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ll} u(t) &= t \\ v'(t) &= e^{-2t} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} u'(t) &= 1 \\ v(t) &= -\frac{1}{2}e^{-2t} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Alors par intégrations par parties, on a,

$$\begin{aligned} \boxed{\int_0^1 t \exp(-2t) dt} &= \left[t \times -\frac{1}{2}e^{-2t} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times -\frac{1}{2}e^{-2t} dt \\ &= \left[-\frac{t}{2}e^{-2t} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2t} dt \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2}e^{-2t} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}(e^{-2} - 1) \\ &= \boxed{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}} \end{aligned}$$

b) $\int_0^1 (1-t)e^{4t} dt$

De même, on montre que

$$\boxed{\int_0^1 (1-t)e^{4t} dt = \frac{e^4}{16} - \frac{5}{16}}$$

c) $\int_1^{e^2} (2x^3 + 1) \ln(x) dx$

De même, on montre que

$$\boxed{\int_1^{e^2} (2x^3 + 1) \ln(x) dx = \frac{9}{8} + e^2 + \frac{7e^8}{8}}$$

Exercice 12 – Intégration par parties & Primitives. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

a) $f : t \mapsto (2t + 1) \exp(3t)$ sur $\mathbb{R}$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^x (2t + 1) \exp(3t) dt$$

Or, on peut calculer cette intégrale par intégrations par parties. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ll} u(t) &= (2t + 1) \\ v'(t) &= e^{3t} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} u'(t) &= 2 \\ v(t) &= \frac{1}{3} e^{3t} \end{array}$$

Alors, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x (2t + 1) \exp(3t) dt \\ &= \left[(2t + 1) \times \frac{1}{3} e^{3t} \right]_0^x - \int_0^x 2 \times \frac{1}{3} e^{3t} dt \\ &= \frac{(2x + 1)}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \int_0^x e^{3t} dt \\ &= \frac{(2x + 1)}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3} e^{3t} \right]_0^x \\ &= \frac{(2x + 1)}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} (e^{3x} - 1) \\ &= \frac{(6x + 1)}{9} e^{3x} - \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Ainsi, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction

$$F : x \mapsto \frac{1}{9} (6x + 1) e^{3x} - \frac{1}{9}$$

b) $g : t \mapsto t \sin(2t)$ sur $\mathbb{R}$

Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{4} \sin(2x) - \frac{1}{2} x \cos(2x)$$

c) $h : t \mapsto t^2 \ln(t)$ sur $]0, +\infty[$

Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{3} x^3 \ln(x) - \frac{1}{9} x^3 + \frac{1}{9}$$

Exercice 13 – Intégration par parties. Calculer, à l'aide de deux intégrations par parties successives, les intégrales suivantes,

a) $\int_0^1 (t^2 + 1)e^t dt = 2e - 3$

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ll} u(t) &= (t^2 + 1) \\ v'(t) &= e^t \end{array} \qquad \begin{array}{ll} u'(t) &= 2t \\ v(t) &= e^t \end{array}$$

Alors, en effectuant une intégration par parties, on obtient,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t^2 + 1)e^t dt &= [(t^2 + 1)e^t]_0^1 - \int_0^1 2te^t dt \\ &= 2e - 1 - 2 \int_0^1 te^t dt \end{aligned}$$

Or l'intégrale restante peut se calculer en effectuant de nouveau une intégration par parties en posant cette fois-ci, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ll} u(t) &= t \\ v'(t) &= e^t \end{array} \qquad \begin{array}{ll} u'(t) &= 1 \\ v(t) &= e^t \end{array}$$

Ainsi, on obtient,

$$\int_0^1 te^t dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - [e^t]_0^1 = e - (e - 1) = 1$$

Ainsi, finalement, on obtient,

$$\boxed{\int_0^1 (t^2 + 1)e^t dt} = 2e - 1 - 2 \int_0^1 te^t dt = 2e - 1 - 2 \times 1 = \boxed{2e - 3}$$

b) $\boxed{\int_1^2 (\ln(x))^2 dx = 2(\ln(2))^2 - 4\ln(2) + 2}$

Exercice 14 – Changement de variables «dans le bon sens». Calculer, à l'aide d'un changement de variables indiqué, les intégrales suivantes.

a) $\int_1^e \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)+1}} dt$

En effectuant le changement de variables « $u = \ln(t)$ »

Expression	Bornes	Le dx
$u = \ln(t)$	$t \mid 1 \mid e$	$du = \frac{dt}{t}$
$t = e^u$	$u \mid 0 \mid 1$	$dt = du e^u$

on obtient,

$$\begin{aligned} \boxed{\int_1^e \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)+1}} dt} &= \int_0^1 \frac{1}{e^u \sqrt{u+1}} e^u du \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u+1}} du \\ &= \left[2\sqrt{u+1} \right]_0^1 \\ &= \boxed{2\sqrt{2} - 2} \end{aligned}$$

b) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$

De même, on a,

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx} = \int_1^e \frac{t}{1+t} \frac{dt}{t} = \int_1^e \frac{1}{1+t} dt = [\ln(|t+1|)]_1^e = \boxed{\ln(e+1) - \ln(2)}$$

c) $\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)} dx$

De même, on a,

$$\begin{aligned} \boxed{\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)} dx} &= \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{1}{t(t+1)} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^4 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} [\ln(|t|) - \ln(|t+1|)]_1^4 \\ &= \boxed{\frac{3}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(5)} \end{aligned}$$

Exercice 15 – Changement de variables «dans le mauvais sens». Calculer, à l’aide d’un changement de variables indiqué, les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^0 (x-2)(x+1)^5 dx$

En effectuant le changement de variables « $x=t-1$ », on a,

Expression	Bornes	Le dx
$x = t - 1$	$x \mid -1 \mid 0$	$dx = dt$
$t = x + 1$	$t \mid 0 \mid 1$	$dt = dx$

on obtient,

$$\begin{aligned}
 \boxed{\int_{-1}^0 (x-2)(x+1)^5 dx} &= \int_0^1 (t-3)t^5 dt \\
 &= \int_0^1 t^6 - 3t^5 dt \\
 &= \left[\frac{t^7}{7} - \frac{3t^6}{6} \right]_0^1 \\
 &= -\frac{5}{14}
 \end{aligned}$$

b) $\int_2^3 \frac{1}{t\sqrt{t(t-1)}} dt$

De même, on obtient,

$$\begin{aligned}
 \boxed{\int_2^3 \frac{1}{t\sqrt{t(t-1)}} dt} &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u}(\frac{1}{u}-1)}} \frac{-du}{u^2} \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u} \times \frac{1-u}{u}}} \frac{-du}{u} \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \frac{\cancel{\sqrt{u^2}}}{\sqrt{1-u}} \frac{-du}{\cancel{u}} \quad \text{car pour tout } u \geq 0, \sqrt{u^2} = |u| = u \\
 &= - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{1-u}} du \\
 &= \left[2\sqrt{1-u} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \\
 &= 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} \\
 &= 2\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$$

De même, on obtient,

$$\begin{aligned} \boxed{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx} &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} \cos(t) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2(t)}} \cos(t) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{|\cos(t)|} \cos(t) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(t)} \cos(t) dt \quad \text{car pour tout } t \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right], \cos(t) \geq 0 \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 1 dt \\ &= \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \boxed{\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Exercice 16 – Changement de variables & Primitives. Calculer, à l’aide du changement de variables indiqué, une primitive des fonctions suivantes sur l’intervalle indiqué.

a) $f : r \mapsto \frac{r}{(1+r^2)^3}$ sur $\mathbb{R}$ en posant « $u = 1 + r^2$ »

Par construction, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^x \frac{r}{(1+r^2)^3} dr$$

Or, en utilisant le changement de variables « $u = 1 + r^2$ », on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{r}{(1+r^2)^3} dr \\ &= \int_1^{1+x^2} \frac{1}{2u^3} du \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{1+x^2} u^{-3} du \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^{-2}}{-2} \right]_1^{1+x^2} \\ &= -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{u^2} \right]_1^{1+x^2} \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{(1+x^2)^2} - 1 \right) \\ &= -\frac{1}{4(x^2+1)^2} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ainsi, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction

$$F : x \mapsto -\frac{1}{4(x^2+1)^2} + \frac{1}{4}$$

b) $g : t \mapsto \frac{3t}{t^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ en posant « $x = 1 + t^2$ »

Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction

$$x \mapsto \frac{3}{2} \ln(x^2 + 1)$$

c) $h : t \mapsto \frac{\cos(t)}{(1-\sin(t))^3}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ en posant « $u = \cos(t)$ »

Ainsi, une primitive de h sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ est la fonction

$$F : x \mapsto \frac{1}{2(1-\sin(x))^2}$$

Exercice 17 – Type problème. On considère, la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx$$

1. Calculer I_0 .

On a,

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} I_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par intégrations par parties (en dérivant la puissance et en intégrant la racine), on obtient,

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3} \int_0^1 x^n (1-x)^{\frac{3}{2}} \, dx$$

En utilisant le fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1-x)^{\frac{3}{2}} = (1-x)\sqrt{1-x}$, puis, en développant, on obtient,

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3} I_n - \frac{2(n+1)}{3} I_{n+1}$$

Finalement, on n'obtient que

$$I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} I_n$$

3. En déduire la valeur de I_1 et I_2 .

En utilisant la relation de la question précédente, on a,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2 \times 0 + 2}{2 \times 0 + 5} I_0 \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

De même, on trouve que,

$$I_2 = \frac{16}{105}$$

Exercice 18 – Type problème. On considère, la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_1^e x(\ln(x))^n dx$$

1. Calculer I_0 et I_1

On peut montrer que

$$\boxed{I_0} = \int_1^e x dx = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$$

et que

$$\boxed{I_1} = \int_1^e x \ln(x) dx = \frac{1}{4}(1 + e^2)$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par intégrations par parties, on obtient,

$$\boxed{I_{n+1}} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$

3. En déduire la valeur de I_2 .

En utilisant la relation précédente, on obtient que

$$\boxed{I_2} = \frac{e^2}{2} - \frac{1+1}{2} I_1 = \frac{1}{4}(e^2 - 1)$$

Exercice 19 – Oral MP CCINP 2023. Soient a et b deux réels strictement positifs. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_a^b \frac{1}{t^{3/2} + t^{1/2}} dt$$

Indication : On pourra utiliser le changement de variables « $u = \sqrt{t}$ ».

Grâce au changement de variables « $u = \sqrt{t}$ », on obtient,

$$\begin{aligned} \boxed{\int_a^b \frac{1}{t^{3/2} + t^{1/2}} dt} &= \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{1}{u^3 + u} 2u du \\ &= 2 \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &= 2 [\arctan(u)]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \\ &\boxed{= 2 [\arctan(\sqrt{b}) - \arctan(\sqrt{a})]} \end{aligned}$$

Exercice 20 – Oral PC CCINP 2022. On considère les deux intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{(\sin(x) + \cos(x))^2} dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{(\sin(x) + \cos(x))^2} dx$$

1. Justifier que les deux intégrales existent.

On peut commencer par remarquer que

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \neq 0$$

Ainsi, la fonction

$$x \mapsto \frac{\cos(x)}{(\sin(x) + \cos(x))^2}$$

est **continue** sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur ce segment. D'où l'existence de l'intégrale I . L'existence de J se montre de la même manière.

2. Le but de cet question est de calculer $I + J$.

(a) Montrer que

$$I + J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin(u)} du$$

On a,

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x) + \cos(x)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin(u)} du \end{aligned}$$

(b) Montrer que

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \quad \sin(x) = \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}$$

On a, pour tout $x \in]-\pi, \pi[$,

$$\begin{aligned} \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} &= \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)} \\ &= \frac{\sin(x)}{1} \\ &= \sin(x) \end{aligned}$$

(c) En déduire, grâce au changement de variables $t = \tan(u/2)$ que

$$I + J = \int_{\tan(\pi/8)}^{\tan(3\pi/8)} \frac{1}{t} dt$$

On a,

$$\begin{aligned} I + J &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin(u)} du \\ &= \int_{\tan(\pi/8)}^{\tan(3\pi/8)} \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int_{\tan(\pi/8)}^{\tan(3\pi/8)} \frac{1}{t} dt \end{aligned}$$

(d) En déduire la valeur de $I + J$.

On a,

$$\begin{aligned} I + J &= \int_{\tan(\pi/8)}^{\tan(3\pi/8)} \frac{1}{t} dt \\ &= [\ln(|t|)]_{\tan(\pi/8)}^{\tan(3\pi/8)} \\ &= \ln(|\tan(3\pi/8)|) - \ln(|\tan(\pi/8)|) \end{aligned}$$

3. En déduire la valeur de I et J .

On a

$$2I = I + J = \dots$$

D'où

$$I = J = \dots$$