DM 3

À rendre pour le mardi 25 novembre (facultatif)

Exercice 1 – Soient $A, D, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec P inversible, trois matrices telles que

$$A = PDP^{-1}$$

Montrer par **récurrence** que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}.$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ » est vraie.

- *Initialisation.* Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  - D'une part, $A^0 = I_n$.
  - D'autre part $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_n$.

  Donc,
  $$A^0 = PD^0P^{-1}$$
  et la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire supposons que
  $$A^n = PD^nP^{-1}$$
  Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que
  $$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$$
  On a,
  $$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= A^n \times PDP^{-1} && \text{d'après l'énoncé} \\ &= PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} && \text{en utilisant l'hypothèse de récurrence} \\ &= PD^nI_nDP^{-1} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$
  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* Donc, par principe de récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire on a montré que
  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}}$$