12. Équations Différentielles

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralité sur les Équations Différentielles

1.1 Notion de solution d'une équation différentielle

On appelle **équation différentielle** toute équation (fonctionnelle) reliant une fonction y (suffisamment régulière) et une ou plusieurs de ses dérivées. Dans la suite, on va s'intéresser plus précisément à des équations différentielles **linéaires**.

Définition 1.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_{n-1}, b$ des fonctions continues sur I. On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre** n une équation de la forme

$$(\mathrm{E}) : y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = b,$$

où y est la fonction inconnue, qui est dérivable n fois.

- Une **solution** de cette équation est une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable n fois telle que

$$\forall t \in I, \qquad f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) f^{(n-1)}(t) + \cdots a_1(t) f'(t) + a_0(t) f(t) = b(t)$$

- **Résoudre** une équation différentielle, c'est trouver toutes ses solutions.

Une équation différentielle est une *équation fonctionnelle*, c'est-à-dire faisant intervenir des fonctions (et non pas des nombres réels). Par exemple, si l'on considère l'équation différentielle

$$y'' + 3y = g, \qquad \text{où} \qquad g : t \mapsto \mathrm{e}^t + t^2 - 1$$

une solution f d'une telle équation différentielle est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\underbrace{f'' + 3f = g}_{\text{égalité de fonctions}} \qquad \text{c-à-d} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{f''(t) + 3f(t) = g(t)}_{\text{égalité de nbrs réels}}$$

Cependant, pour éviter de nommer le second membre, on écrira l'équation différentielle plutôt comme ceci,

$$y'' + 3y = \mathrm{e}^t + t^2 - 1.$$

Il faut bien comprendre que c'est un *abus de notation* : le membre de gauche de l'égalité est une fonction alors que le membre de droite est un réel, et la variable t n'est même pas quantifiée...

Exemple 1.2 On considère l'équation différentielle $y' - y = 0$.

Fonction	Calcul de $f' - f$	Solution de $y' - y = 0$?
$t \mapsto t$		
$t \mapsto \exp(t)$		
$t \mapsto \lvert t \rvert$		

Exemple 1.3 Montrer que la fonction $f : t \mapsto \exp(-2t) + \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}$ est <u>une</u> solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2y = 3t$.

2 Équation Différentielle linéaire du premier ordre

Définition 2.1 On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre résolue** toute équation de la forme

$$(E) \qquad y' + a(t)y = b(t)$$

où a et b sont deux fonctions continues de I vers $\mathbb{K}$.

Exemple 2.2 Reconnaître les différentes équations différentielles linéaire du premier ordre.

Équa. Diff.	Intervalle I	Fonction a	Fonction b
$y' + 2y = 3t$			
$y' + \frac{1}{t}y = 0$			
$(1+t^2)y' + y = t$			

2.1 Étape 1 : Résolution de l'équation homogène associée

Définition 2.3 Soit (E) une équation différentielle linéaire du premier ordre résolue de la forme

$$(E) \quad y' + a(t)y = b(t)$$

où a et b sont deux fonctions continues de I vers $\mathbb{K}$. On appelle **équation différentielle homogène associée** l'équation différentielle donnée par

$$(E_h) \quad y' + a(t)y = 0$$

Exemple 2.4 Donner l'équation différentielle homogène associée.

Équa. Diff.	Équa. Diff Homogène Associée
$y' - 3y = 3t$	
$y' - ty - e^t = 0$	
$y' - t^2y = 0$	

Dans la suite de cette partie, on s'intéresse à la résolution sur I de l'équation homogène

$$(E_h) \quad y' + a(t)y = 0$$

Proposition 2.5 La fonction nulle $f_0 : I \to \mathbb{K}, t \mapsto 0$ est <u>une</u> solution de l'équation homogène (E_h).

Proposition 2.6 Soient A et B deux réels, f_1 et f_2 deux solutions de l'équation homogène (E_h). Alors, la fonction $Af_1 + Bf_2$ est aussi <u>une</u> solution de l'équation homogène (E_h).

Démonstration. Soient A et B deux réels, f_1 et f_2 deux solutions de l'équation homogène (E_h). Alors, on sait que f_1 et f_2 sont dérivables sur I et que,

$$\forall x \in I,\ \ f_1'(t) + a(t)f_1(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in I,\ \ f_2'(t) + a(t)f_2(t) = 0$$

Montrons que $Af_1 + Bf_2$ est aussi <u>une</u> solution de (E_h). Par somme, la fonction $Af_1 + Bf_2$ est dérivable sur I et

$$\begin{aligned}\forall x \in I,\ \ (Af_1 + Bf_2)'(t) + a(t) \times (Af_1 + Bf_2)(t) &= Af_1'(t) + Bf_2'(t) + a(t) \times (Af_1(t) + Bf_2(t)) \\ &= A(f_1'(t) + a(t)f_1(t)) + B(f_2'(t) + a(t)f_2(t)) \\ &= A \times 0 + B \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Proposition 2.7 — Résolution de $y' + a(t)y = 0$. On reprend les notations précédentes. Soit $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de a sur I. On a,

$$f \text{ est solution sur } I \text{ de } (E_h)\ \ y' + a(t)y = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall t \in I,\ f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-A(t)}$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de $(E_h) : y' + a(t)y = 0$ est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} \end{array} \ \middle|\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Démonstration. Raisonons par **analyse-synthèse**.

- *Analyse.* Soit f une solution de $(E_h)\ \ y' + a(t)y = 0$. On définit la fonction g sur I par

$$\forall t \in I, \qquad g(t) = f(t)\mathrm{e}^{A(t)}$$

  Par composition, la fonction g est dérivable et

$$\begin{aligned}\forall t \in I, \qquad g'(t) &= f'(t)e^{A(t)} + f(t)A'(t)\mathrm{e}^{A(t)} \\ &= f'(t)e^{A(t)} + f(t)a(t)\mathrm{e}^{A(t)} && \text{car } A \text{ est une primitive de } a \text{ sur } I \\ &= [f'(t) + a(t)f(t)]e^{A(t)} \\ &= 0 \times e^{A(t)} && \text{car } f \text{ est une solution de } (E_h) \text{ sur } I \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc,

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall t \in I, \qquad g(t) = \lambda$$

c'est-à-dire

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall t \in I, \qquad f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-A(t)}$$

- *Synthèse.* Soit f définie sur I par

$$\forall t \in I, \qquad f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} \qquad \text{avec } \lambda \text{ une constante.}$$

Montrons que f est une solution de (E_h). Tout d'abord, la fonction f est dérivable sur I et

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \qquad f'(t) + a(t)f(t) &= -\lambda A'(t)\mathrm{e}^{-A(t)} + a(t) \\ &= -\lambda a(t)\mathrm{e}^{-A(t)} + a(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où le résultat.

■

Exemple 2.8 Donner les solutions des équations différentielles homogènes du premier ordre suivantes.

Équa. Diff.	Intervalle de résolution	Solutions
$y' - 5y = 0$		
$y' + 2ty = 0$		
$y' + \mathrm{e}^t y = 0$		

Proposition 2.9 — Résolution de $y' + ay = 0$. Soit $a \in \mathbb{K}$ une **constante**. On a,

$$f \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E_h) \ \ y' + ay = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-at}$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de (E_h) : $y' + ay = 0$ est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-at} \end{array} \ \middle| \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemple 2.10 Donner les solutions des équations différentielles homogènes du premier ordre **à coefficient constant** suivantes.

Équa. Diff.	Intervalle de résolution	Solutions
$y' - 2y = 0$		
$y' + y = 0$		

2.2 Étape 2 : Recherche d'une solution particulière

a) Recherche d'une solution particulière dans le cas d'une EDL1 à coefficient constant

Dans cette partie, on cherche à trouver une solution de l'équation différentielle du premier ordre

$$(E) \quad y' + ay = b(t)$$

où a est une **constante** et b est une fonction continue de I vers $\mathbb{K}$.

- Si le second membre est un **polynôme** de degré $n \in \mathbb{N}$, on peut cherche une solution particulier de (E) sous la forme d'un polynôme de degré n.

Exemple 2.11 Trouver une solution particulière à l'équation différentielle $y' + 3y = 6$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2.12 Trouver une solution particulière à l'équation différentielle $y' + 2y = 3t$ sur $\mathbb{R}$.

- Si le second membre est une **fonction exponentielle** de la forme $b : t \mapsto e^{mt}$ alors, on peut cherche une solution particulière sous la forme
  - $y_p : t \mapsto \lambda e^{mx}$ avec λ à déterminer si $m \neq -a$
  - $y_p : t \mapsto \lambda x e^{mx}$ avec λ à déterminer si $m = -a$

  Exemple 2.13 Trouver une solution particulière à l'équation différentielle $y' + 2y = e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$.

- Si le second membre est une **fonction trigonométrique** de la forme $b : t \mapsto \sin(mt)$ ou $b : t \mapsto \cos(mt)$, on commence par trouver une solution particulière avec le second membre $b_c : t \mapsto e^{imt}$ (grâce au point précédent) puis en prenant la partie réelle ou imaginaire, on trouve une solution particulière de l'équation différentielle de départ.

  Exemple 2.14 Trouver une solution particulière à l'équation différentielle (E) $y' + y = \cos(t)$ sur $\mathbb{R}$.

b) Recherche d'une solution particulière dans le cas d'une EDL1

Dans cette partie, on cherche à trouver une solution de l'équation différentielle du premier ordre

$$(E) \quad y' + a(t)y = b(t)$$

où a et b sont deux fonctions continues de I vers $\mathbb{K}$.

Une façon générale de rechercher une solution particulière est d'utiliser la **méthode de variation de la constante**. Plus précisément, cela revient à chercher une solution particulière sous la forme

$$y_p : t \mapsto \lambda(t)e^{A(t)}$$

où A est une primitive de a sur I et λ est une fonction dérivable sur I à déterminer. En injectant la solution particulière dans (E), on trouve l'expression de la fonction λ et donc de y_p.

Exemple 2.15 Trouver <u>une</u> solution particulière à l'équation différentielle (E) $y' + y = \frac{1}{1+e^t}$ sur $\mathbb{R}$.

On peut aussi utiliser le **principe de superposition** suivant qui permet de recherche une solution particulière en décomposant le second membre en des membres plus simples.

Proposition 2.16 Soient a, b_1, b_2 des fonctions continues sur I. On suppose que
- y_1 est une solution sur I de $y' + a(t) = b_1(t)$
- y_2 est une solution sur I de $y' + a(t) = b_2(t)$

Alors, la fonction $y_1 + y_2$ est une solution de $y' + a(t) = b_1(t) + b_2(t)$.

Exemple 2.17 Trouver <u>une</u> solution particulière de l'équation différentielle $y' + y = 2e^t - 1$ sur $\mathbb{R}$.

2.3 Étape 3 : Résoudre l'équation différentielle

Proposition 2.18 — Résolution de $y' + a(t)y = b(t)$. Soient (E) une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme $y' + a(t)y = b(t)$ avec a et b deux fonctions continues sur I, A une primitive de a sur I et y_p une solution particulière de l'équation (E) sur I. Alors,

$$f \text{ est solution sur } I \text{ de l'EDL1 } y' + a(t)y = b(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} + y_p(t)$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de (E) : $y' + a(t)y = b(t)$ est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} + y_p(t) \end{array} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Méthode 1 - Résoudre une EDL1.

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre, on procède en trois étapes (à identifier clairement dans la rédaction).

1. On donne <u>toutes</u> les solutions de l'équation homogène (E_h) (c'est l'objet de l'Étape 1).
2. On trouve <u>une</u> solution particulière de l'équation (E) (c'est l'objet de l'Étape 2).
3. On en déduit <u>toutes</u> les solutions de l'équation (E) en sommant les solution de l'équation homogène (étape 1) et une solution particulière de (E) (étape 2).

solution générale de l'EDL	=	**solution générale de l'équation *homogène* associée**	+	**solution *particulière* de l'EDL**

Exemple 2.19 Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + \frac{1}{t} y = t \exp(t^3)$$

3 EDL du second ordre à coefficients constants

Définition 3.1 On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** toute équation de la forme

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

où $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ sont deux **constantes** et $b : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I.

Exemple 3.2 Reconnaître les différentes équations différentielles linéaire du second ordre.

Équa. Diff.	Intervalle I	Constante a_1	Constante a_0	Fonction b
$y'' - y' - 6y = 0$				
$y'' + 2y' + y = 1$				
$y'' - 4y = 4t + 1$				

3.1 Étape 1 : Résolution de l'équation homogène associée

Définition 3.3 Soit (E) une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants de la forme
$$(E)\ \ y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$
où $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ sont deux **constantes** et $b : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I. On apelle **équation différentielle homogène associée** l'équation différentielle donnée par
$$(E_h)\ \ y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Exemple 3.4 Donner l'équation différentielle homogène associée.

Équa. Diff.	Équa. Diff Homogène Associée
$y'' - 3y' + y = 3t$	
$y'' - y = \cos(t)$	

Dans la suite de cette partie, on s'intéresse à la résolution sur I de l'équation homogène
$$(E_h) \quad y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$
où a_1 et a_0 sont deux **constantes**.

Proposition 3.5 La fonction nulle $f_0 : I \to \mathbb{K}, t \mapsto 0$ est <u>une</u> solution de l'équation homogène (E_h).

Proposition 3.6 Soient A et B deux réels, f_1 et f_2 deux solutions de l'équation homogène (E_h). Alors, la fonction $Af_1 + Bf_2$ est aussi <u>une</u> solution de l'équation homogène (E_h).

Définition 3.7 Soient $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. L'**équation caractéristique** associée à l'équation différentielle homogène $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ est l'équation donnée par
$$r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$
d'inconnue $r \in \mathbb{K}$.

Équa. Diff.	Équation caractéristique	Racine·s de l'équation caractéristique
$y'' + 3y' + 2y = 0$		
$y'' - 4y' + 4y = 0$		
$y'' + y = 0$		

Proposition 3.8 — Résolution de $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ (Solutions complexes). Soient a_1, a_0 deux **complexes** et Δ le discriminant associé à l'équation caractéristique $r^2 + a_1 r + a_0 = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

Racines de l'équation caractéristique	Solutions **complexes** de $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$
$\Delta \neq 0$: Deux racines complexes $r_1 \neq r_2$	$t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec A, B deux complexes
$\Delta = 0$: Une unique racine complexe r_0	$t \mapsto (At + B)e^{r_0 t}$ avec A, B deux complexes

Exemple 3.9 Donner les solutions des équations différentielles homogènes du second ordre à coefficients constants suivantes.

Équa. Diff.	Eq. Carac	Delta	Racines	Sol. Équa. Diff.
$y'' - (2+2i)y' + 2iy = 0$				
$y'' - 2y' + 2y = 0$				

Proposition 3.10 — Résolution de $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ (Solutions réelles). Soient a_1, a_0 deux **réels** et Δ le discriminant associé à l'équation caractéristique $r^2 + a_1 r + a_0 = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{R}$.

Racines de l'équation caractéristique	Solutions **réelles** de $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$
$\Delta > 0$: Deux racines réelles $r_1 \neq r_2$	$t \mapsto A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$ avec A, B deux réels
$\Delta = 0$: Une unique racine réelle r_0	$t \mapsto (At + B)\mathrm{e}^{r_0 t}$ avec A, B deux réels
$\Delta < 0$: Deux racines complexes $r \pm i\omega$	$t \mapsto \mathrm{e}^{rt}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$ avec A, B deux réels

Exemple 3.11 Donner les solutions des équations différentielles homogènes du second ordre à coefficients constants suivantes.

Équa. Diff.	Eq. Carac	Delta	Racines	Sol. Équa. Diff.
$y'' + y' - 6y = 0$				
$y'' + 8y' + 16y = 0$				
$y'' + y' + y = 0$				

3.2 Étape 2 : Recherche d'une solution particulière

Dans cette partie, on cherche à trouver une solution particulière de l'équation différentiel du second ordre à coefficients constants

$$(E) \quad y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

où a_1 et a_0 sont **deux constantes** et b est une fonction continue de I vers $\mathbb{K}$.

- Si le second membre est un **polynôme**, alors, on peut chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de même degré.

  Exemple 3.12 Trouver une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + 4y = 2$.

Exemple 3.13 Trouver <u>une</u> solution particulière à l'équation différentielle $y'' + 2y' + 5y = 5t$.

- Si le second membre est une fonction **exponentielle** de la forme $t \mapsto \lambda e^{pt}$, alors, on peut chercher une solution particulière sous la forme
  - $y_p : t \mapsto Ae^{pt}$ avec $A \in \mathbb{R}$ à déterminer si p n'est pas racine de l'équation caractéristique
  - $y_p : t \mapsto Ate^{pt}$ avec $A \in \mathbb{R}$ à déterminer si p est racine simple de l'équation caractéristique
  - $y_p : t \mapsto At^2e^{pt}$ avec $A \in \mathbb{R}$ à déterminer si p est racine double de l'équation caractéristique

Exemple 3.14 Trouver <u>une</u> solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = e^t$.

- Si le second membre est une **fonction trigonométrique**, on peut d'abord se ramener à une forme exponentielle puis prendre la partie réelle/imaginaire.

  Exemple 3.15 Trouver <u>une</u> solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y = \cos(t)$.

- On peut aussi utiliser le **principe de superposition** suivant qui permet de recherche une solution particulière en décomposant le second membre en des membres plus simples.

  Proposition 3.16 Soient a_1, a_2 deux constantes et b_1, b_2 des fonctions continues sur I. On suppose que
  - y_1 est une solution sur I de $y'' + a_1 y' + a_0 y = b_1(t)$
  - y_2 est une solution sur I de $y'' + a_1 y' + a_0 y = b_2(t)$

  Alors, la fonction $y_1 + y_2$ est une solution de $y'' + a_1 y' + a_0 y = b_1(t) + b_2(t)$

3.3 Étape 3 : Résoudre l'équation différentielle

Proposition 3.17 — Structure de l'ensemble des solutions. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(E) y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$ et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $(E_h) y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$. Les solutions sur I de (E) sont les fonctions qui s'écrivent comme somme d'une solution particulière y_p de l'équation (E) et d'une solution de l'équation homogène (E_h) :

$$\mathcal{S} = \{y_p + f \mid f \in \mathcal{S}_h\}$$

Démonstration. Soit y_p une solution particulière de (E). Par construction, y_p est deux fois dérivable et

$$\forall t \in I, \qquad y_p''(t) + a_1 y_p'(t) + a_0 y_p(t) = b(t)$$

Soit $\varphi : I \to \mathbb{K}$ une fonction deux fois dérivable sur I. Alors,

$$\begin{aligned}
\varphi \in \mathcal{S} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall t \in I,\ \ \varphi''(t) + a_1 \varphi'(t) + a_0 \varphi(t) = b(t) \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall t \in I,\ \ \varphi''(t) + a_1 \varphi'(t) + a_0 \varphi(t) = y_p''(t) + a_1 y_p'(t) + a_0 y_p(t) \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall t \in I,\ \ (\varphi - y_p)''(t) + a_1 (\varphi - y_p)'(t) + a_0 (\varphi - y_p)(t) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \varphi - y_p \in \mathcal{S}_h \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists f \in \mathcal{S}_h,\ \ \varphi - y_p = f \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists f \in \mathcal{S}_h,\ \ \varphi = y_p + f
\end{aligned}$$

■

Méthode 2 - Résoudre une EDL2 à coefficients constants.

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre, on procède en trois étapes (à identifier clairement dans la rédaction).

1. On donne toutes les solutions de l'équation homogène (E_h) (c'est l'objet de l'Étape 1).
2. On trouve une solution particulière de l'équation (E) (c'est l'objet de l'Étape 2).
3. On en déduit toutes les solutions de l'équation (E) en sommant les solution de l'équation homogène (étape 1) et une solution particulière de (E) (étape 2).

solution générale de l'EDL	=	**solution générale de l'équation *homogène* associée**	+	**solution *particulière* de l'EDL**

Exemple 3.18 Résoudre (E) : $y'' - y = e^{2t}$ sur $\mathbb{R}$.

4 Problème de Cauchy

D'après ce qui précède, une EDL1 ou EDL2 à coefficients constants admet une infinité de solutions. En revanche, les théorèmes suivants permettent, grâce à une ou plusieurs *contraintes* supplémentaires, d'obtenir l'*unicité* d'une solution.

Proposition 4.1 — Problème de Cauchy pour une EDL1. Soient $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Soient $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Il existe une unique solution au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Proposition 4.2 — Problème de Cauchy pour une EDL2. Soient $t_0 \in I$ et $x_0, v_0 \in \mathbb{K}$. Soient $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe une unique solution au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t) \\ y(t_0) = x_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

? **Méthode 3 - Comment résoudre un problème de Cauchy.**
Pour résoudre un problème de Cauchy, on peut,

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle associée (sans se soucier des conditions initiales)
2. Déterminer les valeurs des constantes à l'aide des conditions initiales

Exemple 4.3 Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$(\mathrm{P}) : \begin{cases} y' + 2y = 3t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exemple 4.4 Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$(\mathrm{P}) : \begin{cases} y'' + y = \cos(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$