TD 12 – Équations Différentielles

1 EDL du premier ordre

Exercice 1 – Étape 1 : EDL1 homogène à coefficient constant. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a) $y' + y = 0$

b) $y' - 4y = 0$

c) $5y' - y = 0$

d) $5y' = 6y$

Exercice 2 – Étape 1 : EDL1 homogène. Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés.

a) $y' + ty = 0$ sur $\mathbb{R}$

b) $y' - \frac{1}{t}y = 0$ sur $]0, +\infty[$

c) $y' - \frac{1}{t}y = 0$ sur $]-\infty, 0[$

d) $y' - \sin(t)y = 0$ sur $\mathbb{R}$

e) $(1+t^2)y' - 2ty = 0$ sur $\mathbb{R}$

f) $\cos(t)y' + \sin(t)y = 0$ sur $]0, \pi[$

Exercice 3 – Étape 2 : Solutions particulières dans des cas particuliers. Trouver <u>une</u> solution particulière pour chacune des équations suivantes sur les intervalles précisés.

a) $y' + 2y = 1$ sur $\mathbb{R}$

b) $y' + y = t$ sur $\mathbb{R}$

c) $y' + 2y = \mathrm{e}^t$ sur $\mathbb{R}$

d) $y' - 3y = \mathrm{e}^{3t}$ sur $\mathbb{R}$

e) $y' - 3y = \sin(t)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 – Étape 2 : Solutions particulières avec la méthode de variations de la constante. Trouver <u>une</u> solution particulière pour chacune des équations suivantes sur les intervalles précisés.

a) $y' - \frac{2}{t}y = t^2$ sur $]0, +\infty[$

b) $ty' - y = t^2\mathrm{e}^t$ sur $]0, +\infty[$

Exercice 5 – Étape 2 : Solutions particulières avec le principe de superposition. En vous appuyant sur l'Exercice 3, trouver <u>une</u> solution particulière pour chacune des équations suivantes sur les intervalles précisés.

a) $y' + 2y = 1 + \mathrm{e}^t$ sur $\mathbb{R}$

b) $y' - 3y = \mathrm{e}^{3t} + \sin(t)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 6 – Étape 3 : Résolution d'une EDL1. En vous appuyant sur l'Exercice 3, résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés.

a) $y' + 2y = 1$ sur $\mathbb{R}$

b) $y' + y = t$ sur $\mathbb{R}$

c) $y' + 2y = \mathrm{e}^t$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 7 – Étape 3 : Résolution d'une EDL1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés.

a) $y' - \frac{2t}{1+t^2}y = 1 + t^2$ sur $\mathbb{R}$

b) $y' + \frac{1}{t}y = \frac{\cos t}{t}$ sur $]0, +\infty[$

c) $\mathrm{sh}(t)y' - \mathrm{ch}(t)y = 1$ sur $]0, +\infty[$

2 EDL du second ordre

Exercice 8 – Étape 1 : EDL2 homogène à coefficient constant. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a) $y'' + 2y' - 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$

b) $y'' + 2y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$

c) $y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 9 – Étape 2 : Solutions particulières dans des cas particuliers. Trouver <u>une</u> solution particulière pour chacune des équations suivantes sur les intervalles précisés.

a) $y'' + 2y' - 8y = 5$ sur $\mathbb{R}$

b) $y'' + 2y' - 3y = 2\mathrm{e}^t$ sur $\mathbb{R}$

c) $y'' + 2y' + y = 2\mathrm{e}^t$ sur $\mathbb{R}$

d) $y'' + y = \sin(2t)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 10 – Étape 3 : Résolution d'une EDL2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés.

a) $y'' + 2y' - 3y = 2\mathrm{e}^t$ sur $\mathbb{R}$

b) $y'' + y' - 2y = 2t^2 - 3t + 1$

c) $y'' + 2y' + y = 2\mathrm{e}^t$ sur $\mathbb{R}$

d) $y'' + y = \sin(2t)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 11 – Étape 3 : Résolution d'une EDL2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés. *On pourra utiliser le principe de superposition pour trouver une solution particulière.*

a) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{5t}$ sur $\mathbb{R}$

b) $y'' - 4y' + 13y = 8\cos(t) + 16\sin(t)$ sur $\mathbb{R}$

c) $y'' - 3y' - 4y = t + \mathrm{e}^{-t}$ sur $\mathbb{R}$

3 Problèmes de Cauchy

Exercice 12 – Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$(\mathrm{P}) : \left\{ \begin{array}{l} y' - 4y = \mathrm{e}^{4t} \\ y(1) = 0 \end{array} \right.$$

Exercice 13 – Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$(\mathrm{P}) : \left\{ \begin{array}{l} y'' + 6y' + 9y = \mathrm{e}^{-3t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{array} \right.$$

4 Approfondissement

Exercice 14 – Un peu de physique. On considère l'équation différentielle suivante :

$$Mx''(t) + \gamma x'(t) + kx(t) = 0$$

Cette équation permet de décrire le mouvement en fonction du temps d'un objet de masse M suspendu par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et d'un amortisseur visqueux de constante γ. C'est un modèle classique d'amortisseur de véhicule. La quantité $x(t)$ représente alors la hauteur de la masse à l'instant t.

1. Si M et k sont donnés, quelle condition doit vérifier γ afin qu'aucune fonction trigonométrique n'apparaisse dans l'expression de la solution ?
2. On suppose que les constantes valent

$$M = 10^{-1}, \quad \gamma = 2 \times 10^{-2}, \quad k = 10^{-3}$$

et que les conditions initiales sont :

$$x(0) = 0 \quad \text{et} \quad x'(0) = 10^{-1}$$

Déterminer l'expression de la solution $t \mapsto x(t)$.

3. Calculer le maximum de la fonction $x \mapsto x(t)$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 15 – Oral TSI CCINP 2023. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$. *On pourra poser* $z = y'' - y$.

Exercice 16 – Maths C PT 2021.

1. Donner les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ suivante :

$$y' + 2xy = 0$$

Dans ce qui suit, on désignera par f la solution de $(\mathscr{E})$ prenant la valeur 1 en zéro. Il est demandé de donner explicitement f.

2. Déterminer la dérivée seconde f'' et la dérivée troisième f''' de f.
3. Déterminer, après avoir justifié leur existence :

$$\max_{t\in[0,1]} |f(t)|, \quad \text{et} \quad \max_{t\in[0,1]} |f'(t)|,$$

Exercice 17 – Problème de raccordement. On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : ty' - 2y = t^3$.

1. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.
2. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.