TD 11 – Équations Différentielles

1 EDL du premier ordre

Exercice 1 – Étape 1 : EDL1 homogène à coefficient constant. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

> **Formule à utiliser :** Les solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 homogène à coefficient constant de la forme
> $$y' + ay = 0 \qquad \text{(avec } a \text{ une constante)}$$
> sont de la forme
> $$t \mapsto Ae^{-at} \qquad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$

a) $y' + y = 0$ $\boxed{t \mapsto Ae^{-t} \text{ avec } A \in \mathbb{R}}$

b) $y' - 4y = 0$ $\boxed{t \mapsto Ae^{4t} \text{ avec } A \in \mathbb{R}}$

c) $5y' - y = 0$ $\boxed{t \mapsto Ae^{\frac{1}{5}t} \text{ avec } A \in \mathbb{R}}$

d) $5y' = 6y$ $\boxed{t \mapsto Ae^{\frac{6}{5}t} \text{ avec } A \in \mathbb{R}}$

Exercice 2 – Étape 1 : EDL1 homogène. Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés.

> **Formule à utiliser :** Les solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 homogène de la forme
>
> $$y' + a(t)y = 0 \qquad \text{(avec } a \text{ une fonction continue sur } I\text{)}$$
>
> sont de la forme
>
> $$t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$
>
> où A est une primitive de a sur I

a) $y' + ty = 0$ sur $\mathbb{R}$

$\boxed{t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$

b) $y' - \frac{1}{t}y = 0$ sur $]0, +\infty[$

$t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\ln(t)}$ soit $\boxed{t \mapsto \lambda t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$

c) $y' - \frac{1}{t}y = 0$ sur $]-\infty, 0[$

$t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\ln(-t)}$ soit $\boxed{t \mapsto -\lambda t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$

d) $y' - \sin(t)y = 0$ sur $\mathbb{R}$

$\boxed{t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\cos(t)} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$

e) $(1+t^2)y' - 2ty = 0$ sur $\mathbb{R}$

$t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\ln(1+t^2)}$ soit $\boxed{t \mapsto \lambda(1+t^2) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$

f) $\cos(t)y' + \sin(t)y = 0$ sur $]0, \pi[$

$t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\ln(|\cos(t)|)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ soit $\boxed{t \mapsto |\cos(t)| \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$

Exercice 3 – Étape 2 : Solutions particulières dans des cas particuliers. Trouver <u>une</u> solution particulière pour chacune des équations suivantes sur les intervalles précisés.

a) $y' + 2y = 1$ sur $\mathbb{R}$

Second membre constante. On cherche la solution particulière sous la forme d'une fonction constante $y_p : t \mapsto a$ avec a une constante à déterminer.

$$\begin{aligned} & y_p : t \mapsto a \text{ sol de } (E) \\ & \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \ y'(t) + 2y_p(t) = 1 \\ & \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \ 0 + 2a = 1 \\ & \quad \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc, une solution particulière est $\boxed{t \mapsto \frac{1}{2}.}$

b) $y' + y = t$ sur $\mathbb{R}$

Second membre sous la forme d'un polynôme de degré 1. On cherche la solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1 $y_p : t \mapsto at + b$ avec a, b deux constantes à déterminer.

$$\begin{aligned} & y_p : t \mapsto at + b \text{ sol de } (E) \\ & \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \ y'(t) + y_p(t) = t \\ & \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \ a + at + b = t \\ & \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \ at + a + b = t \\ & \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \\ & \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, une solution particulière est $\boxed{t \mapsto t - 1.}$

c) $y' + 2y = \mathrm{e}^t$ sur $\mathbb{R}$

Second membre sous la forme exponentielle dont le «coefficient» n'est pas le même que devant le y. On cherche la solution particulière sous la forme $t \mapsto a\mathrm{e}^t$ avec a une constante réelle à déterminer.

$$\begin{aligned} & y_p : t \mapsto a\mathrm{e}^t \text{ sol de } (E) \\ & \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \ y'(t) + 2y_p(t) = \mathrm{e}^t \\ & \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \ a\mathrm{e}^t + 2a\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t \\ & \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \ 3a = 1 \\ & \quad \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc, une solution particulière est $\boxed{t \mapsto \frac{1}{3}\mathrm{e}^t.}$

d) $y' - 3y = e^{3t}$ sur $\mathbb{R}$

Second membre sous la forme exponentielle dont le «coefficient» est le même que devant le y. On cherche la solution particulière sous la forme $t \mapsto at e^{3t}$ avec a une constante réelle à déterminer.

$$\begin{aligned}
& y_p : t \mapsto at e^{3t} \text{sol de } (E) \\
& \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \ \ y'(t) - 3y_p(t) = e^{3t} \\
& \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \ \ [(a + 3at)e^{3t}] - 3[ate^{3t}] = e^{3t} \\
& \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \ \ ae^{3t} = e^{3t} \\
& \quad \Leftrightarrow a = 1
\end{aligned}$$

Donc, une solution particulière est $\boxed{t \mapsto te^{3t}.}$

e) $y' - 3y = \sin(t)$ sur $\mathbb{R}$

- On commencer par s'intéresser à l'EDL1

$$(E_c) y' - 3y = e^{it}$$

Comme le second membre est une exponentielle dont le «coefficient» n'est pas le même que «devant le y», on peut chercher une solution particulière sous la forme $t \mapsto ae^{it}$ avec a une constante (complexe) à déterminer.

$$\begin{aligned}
& y_p : t \mapsto ae^{it} \text{sol de } (E_c) \\
& \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \ \ y'(t) - 3y_p(t) = e^{it} \\
& \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \ \ aie^{it} - 3ae^{it} = e^{it} \\
& \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \ \ ai - 3a = 1 \\
& \quad \Leftrightarrow a = \frac{1}{i-3}
\end{aligned}$$

On trouve que la fonction $t \mapsto \frac{1}{i-3}e^{it}$ est une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de (E_c)

- On en déduit que la fonction $t \mapsto \operatorname{Im}\left(\frac{1}{i-3}e^{it}\right)$ est une solution particulière de $y' - 3y = \sin(t)$ sur $\mathbb{R}$. Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(\frac{1}{i-3}e^{it}\right) &= \operatorname{Im}\left(\frac{i+3}{(i-3)(i+3}e^{it}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(-\frac{i+3}{10}e^{it}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(-\frac{i+3}{10}(\cos t + i \sin t)\right) \\
&= -\frac{1}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t
\end{aligned}$$

Ainsi, une solution particulière est

$$\boxed{t \mapsto -\frac{1}{10}(\cos t + 3 \sin t)}$$

Exercice 4 – Étape 2 : Solutions particulières avec la méthode de variations de la constante. Trouver une solution particulière pour chacune des équations suivantes sur les intervalles précisés.

a) $y' - \frac{2}{t}y = t^2$ sur $]0,+\infty[$

On cherche une solution particulière sur $]0,+\infty[$ de la forme

$$y_p : t \mapsto \lambda(t)\mathrm{e}^{2\ln(|t|)} \text{ c-à-d } y_p : t \mapsto \lambda(t) \times t^2$$

avec λ une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$. Alors, la fonction y_p est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\begin{aligned} & y_p \text{ solution de } (E) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in]0,+\infty[, \; y_p'(t) - \frac{2}{t}y_p(t) = t^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in]0,+\infty[, \; \lambda'(t)t^2 + \cancel{2t\lambda(t)} - \cancel{\frac{2}{t}\lambda(t)t^2} = t^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in]0,+\infty[, \; \lambda'(t) = 1 \end{aligned}$$

On peut choisir par exemple,

$$\lambda : t \mapsto t$$

Ainsi, une solution particulière de (E) sur $]0,+\infty[$ est la fonction

$$\boxed{y_p : t \mapsto t^3}$$

b) $ty' - y = t^2\mathrm{e}^t$ sur $]0,+\infty[$

Tout d'abord, on met l'équation sous forme **résolue**. Sur $]0,+\infty[$, on a,

$$ty' - y = t^2\mathrm{e}^t \quad \Leftrightarrow \quad y' - \frac{1}{t}y = t\mathrm{e}^t$$

On cherche une solution particulière sur $]0,+\infty[$ de la forme

$$y_p : t \mapsto \lambda(t)\mathrm{e}^{\ln(|t|)} \text{ c-à-d } y_p : t \mapsto \lambda(t) \times t$$

avec λ une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$. Alors, la fonction y_p est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\begin{aligned} & y_p \text{ solution de } (E) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in]0,+\infty[, \; y_p'(t) - \frac{1}{t}y_p(t) = t\mathrm{e}^t \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in]0,+\infty[, \; \lambda'(t)t + \cancel{\lambda(t)} - \cancel{\frac{1}{t}\lambda(t)t} = t\mathrm{e}^t \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in]0,+\infty[, \; \lambda'(t) = \mathrm{e}^t \end{aligned}$$

On peut choisir par exemple,

$$\lambda : t \mapsto \mathrm{e}^t$$

Ainsi, une solution particulière de (E) sur $]0,+\infty[$ est la fonction

$$\boxed{y_p : t \mapsto t\mathrm{e}^t}$$

Exercice 5 – Étape 2 : Solutions particulières avec le principe de superposition. En vous appuyant sur l'Exercice 3, trouver une solution particulière pour chacune des équations suivantes sur les intervalles précisés.

a) $y' + 2y = 1 + e^t$ sur $\mathbb{R}$

En ré-utilisant les résultats de l'Exercice 3, on sait que

- $t \mapsto \frac{1}{2}$ est une solution particulière de $y' + 2y = 1$ sur $\mathbb{R}$
- $t \mapsto \frac{1}{3}e^t$ est une solution particulière de $y' + 2y = e^t$ sur $\mathbb{R}$

Donc, par principe de superposition, la fonction

$$\boxed{t \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^t}$$

est une solution particulière de $y' + 2y = 1 + e^t$ sur $\mathbb{R}$

b) $y' - 3y = e^{3t} + \sin(t)$ sur $\mathbb{R}$

En ré-utilisant les résultats de l'Exercice 3, on sait que

- $t \mapsto te^{3t}$ est une solution particulière de $y' - 3y = e^{3t}$ sur $\mathbb{R}$
- $t \mapsto -\frac{1}{10}(\cos t + 3\sin t)$ est une solution particulière de $y' - 3y = \sin(t)$ sur $\mathbb{R}$

Donc, par principe de superposition, la fonction

$$\boxed{t \mapsto te^{3t} - \frac{1}{10}(\cos t + 3\sin t)}$$

est une solution particulière de $y' - 3y = e^{3t} + \sin(t)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 6 – Étape 3 : Résolution d'une EDL1. En vous appuyant sur l'Exercice 3, résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés.

Principe de résolution : Les solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 sont de la forme

sol de l'eq homogène + une solution particulière

a) $y' + 2y = 1$ sur $\mathbb{R}$
$t \mapsto Ae^{-2t} + \frac{1}{2}$ avec $A \in \mathbb{R}$

On est face à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant.

- *Solution homogène.* On commence par résoudre l'équation différentielle homogène associée :
$$y' + 2y = 0$$
Les solutions sont de la forme
$$t \mapsto Ae^{-2t} \qquad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$
- *Une solution particulière.* D'après l'Exercice 3, une solution particulière de l'équation différentielle $y' + 2y = 1$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction
$$t \mapsto \frac{1}{2}$$
- *Conclusion.* Ainsi, les solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 1$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions
$$\boxed{t \mapsto Ae^{-2t} + \frac{1}{2} \qquad \text{avec } A \in \mathbb{R}}$$

b) $y' + y = t$ sur $\mathbb{R}$
$\boxed{t \mapsto Ae^{-t} + t - 1 \text{ avec } A \in \mathbb{R}}$

c) $y' + 2y = e^t$ sur $\mathbb{R}$
$\boxed{t \mapsto Ae^{-2t} + \frac{1}{3}e^t \text{ avec } A \in \mathbb{R}}$

Exercice 7 – Étape 3 : Résolution d'une EDL1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés.

Principe de résolution : Les solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 sont de la forme

sol de l'eq homogène + une solution particulière

a) $y' - \frac{2t}{1+t^2}y = 1+t^2$ sur $\mathbb{R}$

On est face à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

- *Solution homogène.* On commence par résoudre l'équation différentielle homogène associée :
$$y' - \frac{2t}{1+t^2}y = 0$$
Les solutions sont de la forme
$$t \mapsto Ae^{\ln(|1+t^2|)} \qquad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$
autrement dit de la forme
$$t \mapsto A(1+t^2) \qquad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$
- *Une solution particulière.* Pour trouver une solution particulière de $y' - \frac{2t}{1+t^2}y = 1+t^2$ sur $\mathbb{R}$, on peut utiliser le principe de variations de la constante. On cherche une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de la forme
$$y_p : t \mapsto \lambda(t)(1+t^2)$$
avec λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors, la fonction y_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\begin{aligned} & y_p \text{ solution de } (E) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R},\ y_p'(t) - \frac{2t}{1+t^2}y_p(t) = 1+t^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda'(t)(1+t^2) + \cancel{\lambda(t) \times 2t} - \cancel{\frac{2t}{1+t^2} \times \lambda(t)(1+t^2)} = 1+t^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda'(t) = 1 \end{aligned}$$
On peut choisir par exemple,
$$\lambda : t \mapsto t$$
Ainsi, une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ est la fonction
$$y_p : t \mapsto t(1+t^2)$$
- *Conclusion.* Ainsi, les solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 1$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions
$$\boxed{t \mapsto A(1+t^2) + t + t^3 \qquad \text{avec } A \in \mathbb{R}}$$

b) $y' + \frac{1}{t}y = \frac{\cos t}{t}$ sur $]0, +\infty[$

$\boxed{t \mapsto \frac{A}{t} + \frac{\sin(t)}{t} \text{ avec } A \in \mathbb{R}}$

c) $\text{sh}(t)y' - \text{ch}(t)y = 1$ sur $]0, +\infty[$

$\boxed{t \mapsto A\,\text{sh}(t) - \text{ch}(t) \text{ avec } A \in \mathbb{R}}$

2 EDL du second ordre

Exercice 8 – Étape 1 : EDL2 homogène à coefficient constant. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a) $y'' + 2y' - 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$

- Équation caractéristique: $r^2 + 2r - 3 = 0$.
- Racines de l'équation caractéristique : -3 et 1
- Solution de l'ed : $\boxed{t \mapsto A\mathrm{e}^{-3t} + B\mathrm{e}^{t} \text{ avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes réelles.}}$

b) $y'' + 2y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$

- Équation caractéristique: $r^2 + 2r + 1 = 0$.
- Racine de l'équation caractéristique : -1
- Solution de l'ed : $\boxed{t \mapsto (At + B)\mathrm{e}^{-t} \text{ avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes réelles.}}$

c) $y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$

- Équation caractéristique: $r^2 + 1 = 0$.
- Racine de l'équation caractéristique : i et $-i$
- Solution de l'ed : $\boxed{t \mapsto A\cos(t) + B\sin(t) \text{ avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes réelles.}}$

Exercice 9 – Étape 2 : Solutions particulières dans des cas particuliers. Trouver <u>une</u> solution particulière pour chacune des équations suivantes sur les intervalles précisés.

a) $y'' + 2y' - 8y = 5$ sur $\mathbb{R}$

Second membre sous la forme d'une constante. On cherche la solution particulière sous la forme d'une fonction constante $y_p : t \mapsto a$ avec a une constante à déterminer.

$$\begin{aligned} & y_p : t \mapsto a \text{ sol de } (E) \\ & \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ y_p''(t) + 2y_p'(t) - 8y_p(t) = 5 \\ & \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ 0 + 2 \times 0 - 8a = 5 \\ & \quad \Leftrightarrow a = -\frac{5}{8} \end{aligned}$$

Donc, une solution particulière est $\boxed{t \mapsto -\frac{5}{8}.}$

b) $y'' + 2y' - 3y = 2\mathrm{e}^t$ sur $\mathbb{R}$

Second membre sous la forme d'une exponentielle mais attention : le coefficient dans l'exponentielle (qui vaut 1) est une racine simple de l'équation caractéristique. On cherche la solution particulière sous la forme $y_p : t \mapsto at\mathrm{e}^t$ avec a une constante à déterminer.

$$\begin{aligned} & y_p : t \mapsto at\mathrm{e}^t \text{ sol de } (E) \\ & \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ y_p''(t) + 2y_p'(t) - 3y_p(t) = 2\mathrm{e}^t \\ & \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ a(t+2)\mathrm{e}^t + 2a(t+1)\mathrm{e}^t - 3(at\mathrm{e}^t) = 2\mathrm{e}^t \\ & \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ a(t+2) + 2a(t+1) - 3(at) = 2 \\ & \quad \Leftrightarrow 4a = 2 \\ & \quad \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc, une solution particulière est $\boxed{t \mapsto \frac{1}{2}t\mathrm{e}^t.}$

c) $y'' + 2y' + y = 2\mathrm{e}^t$ sur $\mathbb{R}$

Second membre sous la forme d'une exponentielle et le coefficient dans l'exponentielle (qui vaut 1) n'est pas une racine de l'équation caractéristique. On cherche la solution particulière sous la forme $y_p : t \mapsto a\mathrm{e}^t$ avec a une constante à déterminer.

$$\begin{aligned} & y_p : t \mapsto a\mathrm{e}^t \text{ sol de } (E) \\ & \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ y_p''(t) + 2y_p'(t) + y_p(t) = 2\mathrm{e}^t \\ & \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ a\mathrm{e}^t + 2a\mathrm{e}^t + a\mathrm{e}^t = 2\mathrm{e}^t \\ & \quad \Leftrightarrow 4a = 2 \\ & \quad \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc, une solution particulière est $\boxed{t \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^t.}$

d) $y'' + y = \sin(2t)$ sur $\mathbb{R}$

- On peut commencer par chercher une solution particulière de

$$(E_c) \qquad y'' + y = \mathrm{e}^{2it}$$

Second membre sous la forme d'une exponentielle et le coefficient dans l'exponentielle (qui vaut $2i$) n'est pas une racine de l'équation caractéristique. On cherche la solution particulière sous la forme $y_p : t \mapsto a\mathrm{e}^{2it}$ avec a une constante (ici complexe à priori) à déterminer.

$$\begin{aligned}
&y_p : t \mapsto a\mathrm{e}^{2it} \text{ sol de } (E) \\
&\qquad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \ y_p''(t) + y_p(t) = \mathrm{e}^{2it} \\
&\qquad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \ -4a\mathrm{e}^{2it} + a\mathrm{e}^{2it} = \mathrm{e}^{2it} \\
&\qquad \Leftrightarrow -3a = 1 \\
&\qquad \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Donc, une solution particulière est $t \mapsto -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2it}$.

- On en déduit qu'une solution particulière de $y'' + y = \sin(2t)$ sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$t \mapsto \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2it}\right)$$

autrement dit par

$$\boxed{t \mapsto -\frac{1}{3}\sin(2t)}$$

Exercice 10 – Étape 3 : Résolution d'une EDL2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés.

Principe de résolution : Les solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 sont de la forme

sol de l'eq homogène + une solution particulière

a) $y'' + 2y' - 3y = 2e^t$ sur $\mathbb{R}$

On est face à une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

- *Solution homogène.* On commence par résoudre l'équation différentielle homogène associée :
$$y'' + 2y' - 3y = 0$$
D'après l'Exercice 8, les solutions sont de la forme
$$t \mapsto Ae^{-3t} + Be^t \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$
- *Une solution particulière.* De plus, d'après l'Exercice 9, une solution particulière de $y'' + 2y' - 3y = 2e^t$ sur $\mathbb{R}$ est
$$t \mapsto \frac{1}{2} t e^t$$
- *Conclusion.* Ainsi, les solutions de l'équation différentielle$y'' + 2y' - 3y = 2e^t$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions
$$\boxed{t \mapsto Ae^{-3t} + Be^t + \frac{1}{2} t e^t \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}}$$

b) $y'' + y' - 2y = 2t^2 - 3t + 1$

$$\boxed{t \mapsto Ae^{-2t} + Be^t - t^2 + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{5}{4} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}}$$

c) $y'' + 2y' + y = 2e^t$ sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{t \mapsto (At + B)e^{-t} + \tfrac{1}{2}e^t \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}}$$

d) $y'' + y = \sin(2t)$ sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{t \mapsto A\cos(t) + B\sin(t) - \tfrac{1}{3}\sin(2t) \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}}$$

Exercice 11 – Étape 3 : Résolution d'une EDL2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés. *On pourra utiliser le principe de superposition pour trouver une solution particulière.*

a) $y'' - 3y' + 2y = e^t + e^{5t}$ sur $\mathbb{R}$

On est face à une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

- *Solution homogène.* On commence par résoudre l'équation différentielle homogène associée :
$$y'' - 3y' + 2y = 0$$
L'équation caractérisque associée est donnée par
$$r^2 - 3r + 2 = 0 \iff (r-1)(r-2) = 0$$
Ainsi l'équation caractéristique admet deux solutions réelles : 1 et 2 (on peut aussi les trouver en utilisant le discriminant).
$$t \mapsto Ae^t + Be^{2t} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$
- *Une solution particulière.*
  - Tout d'abord, on peut montrer que la fonction $t \mapsto -te^t$ est une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = e^t$ sur $\mathbb{R}$.
  - On peut aussi montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{12}e^{5t}$ est une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = e^{5t}$ sur $\mathbb{R}$

  Ainsi, par principe de superposition, une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = e^t + e^{5t}$ sur $\mathbb{R}$ est
$$t \mapsto -te^t + \frac{1}{12}e^{5t}$$
- *Conclusion.* Ainsi, les solutions de l'équation différentielle$y'' + 2y' - 3y = 2e^t$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions
$$\boxed{t \mapsto Ae^t + Be^{2t} - te^t + \frac{1}{12}e^{5t} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}}$$

b) $y'' - 4y' + 13y = 8\cos(t) + 16\sin(t)$ sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{t \mapsto e^{2t}(A\cos(3t) + B\sin(3t) + \sin(t) + \cos(t) \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}}$$

c) $y'' - 3y' - 4y = t + e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{t \mapsto Ae^{-t} + Be^{4t} - \tfrac{1}{4}t + \tfrac{3}{16} - \tfrac{1}{5}te^{-t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}}$$

3 Problèmes de Cauchy

Exercice 12 – Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$(\mathrm{P}) : \left\{ \begin{array}{l} y' - 4y = \mathrm{e}^{4t} \\ y(1) = 0 \end{array} \right.$$

- *Résolution de l'équation différentielle.* Commençons par résoudre l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' - 4y = \mathrm{e}^{4t}$$

  On est face à une équation linéaire d'ordre 1 à coefficient constant.
  - Les solutions de l'équation différentielle homogène associée $y' - 4y = 0$ sont de la forme
  $$t \mapsto A\mathrm{e}^{4t} \qquad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$
  - Au vu du second membre, on peut chercher une solution particulière sous la forme $y_p : t \mapsto \lambda t\mathrm{e}^{4t}$ avec λ une constante à déterminer. En injectant cette fonction dans (E), on trouve que $\lambda = 1$.
  - Ainsi, les solutions de (E) sont de la forme
  $$t \mapsto A\mathrm{e}^{4t} + t\mathrm{e}^{4t} \qquad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$

- *Condition initiale.* Soit $f_A : t \mapsto A\mathrm{e}^{4t} + t\mathrm{e}^{4t}$ une solution de (E) (avec $A \in \mathbb{R}$). Alors

$$f_A(1) = 0 \iff A\mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^4 = 0 \iff A = -1$$

- *Conclusion.* Ce problème de Cauchy admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, donnée par

$$\boxed{t \mapsto -\mathrm{e}^{4t} + t\mathrm{e}^{4t}}$$

Exercice 13 – Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$(\mathrm{P}) : \left\{ \begin{array}{l} y'' + 6y' + 9y = \mathrm{e}^{-3t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{array} \right.$$

- *Résolution de l'équation différentielle.* Commençons par résoudre l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 6y' + 9y = \mathrm{e}^{-3t}$$

On est face à une équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

- On commence par résoudre l'équation différentielle homogène associée $(E_H) : y'' + 6y' + 9y = 0$. Pour cela, on commence par regarder l'équation caractéristique,

$$r^2 + 6r + 9 = 0 \iff (r+3)^2 = 0$$

L'équation caractéristique admet une unique solution réelle donnée par -3. Ainsi, l'équation homogène (E_H) admet des solutions de la forme

$$t \mapsto (At+B)\mathrm{e}^{-3t} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- Au vu du second membre, on peut chercher une solution particulière sous la forme $y_p : t \mapsto \lambda t^2 \mathrm{e}^{-3t}$ avec λ une constante à déterminer. En injectant cette fonction dans (E), on trouve que $\lambda = \frac{1}{2}$.
- Ainsi, les solutions de (E) sont de la forme

$$t \mapsto (At+B)\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-3t} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- *Condition initiale.* Soit $f_{A,B} : (At+B)\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-3t}$ une solution de (E) (avec $A, B \in \mathbb{R}$). Déjà, on peut calculer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'_{A,B}(t) = (A(2-6t) - 6B + (2-3t)t)\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{A,B}(0) = 1 \\ f'_{A,B}(0) = 2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} B = 1 \\ A - 3B = 2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} B = 1 \\ A = 5 \end{array} \right.$$

- *Conclusion.* Ce problème de Cauchy admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, donnée par

$$\boxed{t \mapsto (5t+1)\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-3t}}$$

4 Approfondissement

Exercice 14 – Problème de raccordement. On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $ty' - 2y = t^3$.

1. Résoudre (E) sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$.

   Commençons par la résolution sur $]0,+\infty[$. Tout d'abord, sur $]0,+\infty[$

   $$(E_+) \;\; ty' - 2y = t^3 \Leftrightarrow y' - \frac{2}{t}y = t^2$$

   - Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme

     $$t \mapsto A\exp(2\ln(|t|)) \text{ soit } t \mapsto At^2$$

     avec A une constante réelle.
   - On peut montrer que $y_p : t \mapsto t^3$ est une solution particulière de (E_+).
   - Ainsi, les $\boxed{\text{solutions de } (E_+) \text{ sur }]0,+\infty[}$ sont de la forme

     $$\boxed{t \mapsto At^2 + t^3}$$

   On montre de même que les $\boxed{\text{solutions de } ty' - 2y = t^3 \text{ sur }]-\infty,0[}$ sont de la forme

   $$\boxed{t \mapsto Bt^2 + t^3}$$

2. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

   Raisonnons par analyse-synthèse.

   - *Analyse.* Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Alors, en particulier, y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$. Donc,

     $$\exists A \in \mathbb{R}, \;\; \forall t > 0, \;\; y(t) = At^2 + t^3$$
     $$\exists B \in \mathbb{R}, \;\; \forall t < 0, \;\; y(t) = Bt^2 + t^3$$

     Regardons le raccordement en 0.
     - De plus, l'évaluation de (E) en $t = 0$ donne

       $$y(0) = 0$$

       La fonction y doit être dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier continue en 0. Cela ne donne aucune condition sur les constantes A et B.
     - La fonction y doit être dérivable en 0, et donc, les limites à droite et à gauche du taux d'accroissement en 0 doivent être finies et égales. Or,

       $$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} \frac{y(t)-y(0)}{t-0} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{At^2+t^3-y(0)}{t-0} \\ &= \lim_{t\to 0^+} At + t^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

       De même,

       $$\lim_{t\to 0^-} \frac{y(t)-y(0)}{t-0} = 0$$

       Donc, la dérivabilité en 0 ne donne aucune condition.
   - *Synthèse.* On définit la fonction y par

     $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \begin{cases} At^2 + t^3 & \text{si } t \geqslant 0 \\ Bt^2 + t^3 & \text{si } t < 0 \end{cases}}$$

     On peut vérifier que y est dérivable sur $\mathbb{R}$ (la dérivabilité en 0 n'est pas triviale !) et que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 – Un peu de physique. On considère l'équation différentielle suivante :

$$Mx''(t)+\gamma x'(t)+kx(t)=0$$

Cette équation permet de décrire le mouvement en fonction du temps d'un objet de masse M suspendu par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et d'un amortisseur visqueux de constante γ. C'est un modèle classique d'amortisseur de véhicule. La quantité $x(t)$ représente alors la hauteur de la masse à l'instant t.

1. Si M et k sont donnés, quelle condition doit vérifier γ afin qu'aucune fonction trigonométrique n'apparaisse dans l'expression de la solution ?

   On est face à une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. La résolution de cette équation différentielle dépend des solutions de l'équation caractéristique associée :

   $$Mr^2+\gamma r+k=0$$

   Aucune fonction trigonométrique n'apparait dans l'expression de la solution si le discriminant de l'équation caractéristique est positif ou nul (auquel cas, ce sont des exponentielles/polynomes qui apparaissent), c'est-à-dire si

   $$\boxed{\Delta=\gamma^2-4Mk\geqslant 0}$$

2. On suppose que les constantes valent

   $$M=10^{-1},\ \ \gamma=2\times 10^{-2},\ \ k=10^{-3}$$

   et que les conditions initiales sont :

   $$x(0)=0 \quad \text{et} \quad x'(0)=10^{-1}$$

   Déterminer l'expression de la solution $t\mapsto x(t)$.

   On est face à une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation caractéristique associée :

   $$Mr^2+\gamma r+k=0$$

   Le discriminant de cette équation de second degré vaut (avec les valeurs numériques de l'énoncé) Avec ces valeurs,

   $$\Delta=\gamma^2-4Mk=0$$

   Donc, l'équation caractéristique associée admet une unique solution donnée par, $-\frac{\gamma}{2M}=-10^{-1}$. Donc, les solutions de l'ED sont de la forme

   $$\forall t\in\mathbb{R},\qquad x(t)=(At+B)\exp\left(-\frac{\gamma}{2M}t\right)$$

   avec A et B deux constantes réelles. On peut calculer que

   $$\forall t\in\mathbb{R},\ x'(t)=[A-\frac{\gamma}{2M}(At+B)]\exp\left(-\frac{\gamma}{2M}t\right)$$

   Les valeurs des conditions initiales fixent les constantes :

   $$\begin{cases} x(0)=0 \\ x'(0)=10^{-1}\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} B=0 \\ A=10^{-1}\end{cases}$$

   Ainsi, il existe une unique solution qui vérifie l'ED et les conditions initiales qui est donnée par,

   $$\boxed{x:t\mapsto 10^{-1}t\exp\left(-10^{-1}t\right)}$$

3. Calculer le maximum de la fonction $x\ \mapsto x(t)$ sur $[0,+\infty[$.

   On peut montrer que (en faisant le tableau de variations de la fonction par exemple)

   $$\boxed{\max_{t\geqslant 0} x(t)=\frac{1}{\mathrm{e}} \quad \text{atteint en } x=10}$$

Exercice 16 – Oral TSI CCINP 2023. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$. *On pourra poser* $z = y'' - y$.

Raisonnons par analyse synthèse.

- *Analyse*. Soit y une solution de $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$. On pose $z = y'' - y$. Alors, z est solution de
$$z'' - z = 0$$
qui est une équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficient constant. Donc (en ayant étudier l'équation caractéristique),
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ z(t) = A\mathrm{e}^{t} + B\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$
Ainsi, y est solution de
$$y'' - y = A\mathrm{e}^{t} + B\mathrm{e}^{-t}$$
En résolvant cette ED (en trouvant une solution particulière grâce au principe de superposition), on trouve que
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ y(t) = C\mathrm{e}^{t} + D\mathrm{e}^{-t} + \frac{A}{2}t\mathrm{e}^{t} - \frac{B}{2}t\mathrm{e}^{-t}$$
- *Synthèse.* Soient A, B, C, D quatre constantes réelles. Soit y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ y(t) = C\mathrm{e}^{t} + D\mathrm{e}^{-t} + \frac{A}{2}t\mathrm{e}^{t} - \frac{B}{2}t\mathrm{e}^{-t}$$
On peut alors vérifier (par le calcul) que y est sol de $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
- *Conclusion.* Les solutions de $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions
$$\boxed{t \mapsto C\mathrm{e}^{t} + D\mathrm{e}^{-t} + \frac{A}{2}t\mathrm{e}^{t} - \frac{B}{2}t\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{avec } A, B, C, D \in \mathbb{R}}$$

Exercice 17 – Maths C PT 2021.

1. Donner les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ suivante :

$$y' + 2xy = 0$$

On est face à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène. Les solutions sont de la forme

$$\boxed{x \mapsto A\exp(-x^2) \qquad \text{avec } A \in \mathbb{R}}$$

Dans ce qui suit, on désignera par f la solution de $(\mathscr{E})$ prenant la valeur 1 en zéro. Il est demandé de donner explicitement f.

D'après la question précédente, l'unique fonction solution de $(\mathscr{E})$ prenant la valeur 1 en zéro est la fonction

$$\boxed{f : x \mapsto \exp(-x^2)}$$

2. Déterminer la dérivée seconde f'' et la dérivée troisième f''' de f.

On peut montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -2x\exp(-x^2)$$
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = (4x^2-2)\exp(-x^2)}$$
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'''(x) = (-8x^3+12x)\exp(-x^2)}$$

3. Déterminer, après avoir justifié leur existence :

$$\max_{t\in[0,1]} |f(t)|, \qquad \text{et} \qquad \max_{t\in[0,1]} |f'(t)|,$$

On peut faire le tableau de signes de f'', puis en déduire le tableau de variations de f' pour en déduire le signe de f' pour en déduire les variations de f... On trouve alors,

$$\boxed{\max_{t\in[0,1]} |f(t)| = 1} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\max_{t\in[0,1]} |f'(t)| = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}}$$