13. Compléments sur les nombres réels

1 Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Nom de l'ensemble	Notation	Définition	Exemples d'éléments
Ensemble des **entiers naturels**	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$	$0, 10, 142, \dots$
Ensemble des **entiers relatifs**	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$	$-13, 0, 1, \dots$
Ensemble des **nombres décimaux**	$\mathbb{D}$	$\mathrm{d} = \left\{ \frac{k}{10^p} \mid k \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N} \right\}$	$0.2 = \frac{2}{10^1}$, $123.45 = \frac{12345}{10^2}$,...
Ensemble des **nombres rationnels**	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$	$\frac{1}{2}, -1, 2, \dots$
Ensemble des **nombres irrationnels**	$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$		$\sqrt{2}$, π, e,...
Ensemble des **nombres réels**	$\mathbb{R}$		$0, \sqrt{2}, -3, \dots$

Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont définis en **extension** (on donne la liste de tous les éléments) tandis que les ensembles $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ sont définis sous forme **paramétrique**. On a les inclusions suivantes :

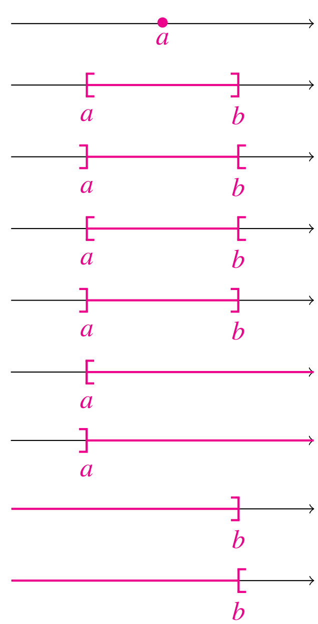
$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 2.1 On dit qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un **intervalle** si, pour tout $(a, b) \in I^2$, $[a, b] \subset I$.

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont l'ensemble vide $\varnothing$, l'ensemble $\mathbb{R}$ et les ensembles suivants, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$:

- Les singletons : $\{a\}$
- les intervalles fermés ou segments : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- les intervalles ouverts : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- les intervalles fermés en a, ouverts en b : $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- les intervalles ouverts en a, fermés en b : $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- les demi-droites fermées en a : $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
- les demi-droites ouvertes en a : $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
- les demi-droites fermées en b : $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
- les demi-droites ouvertes en b : $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$



Exemple 2.2 Dire si les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

a) $]-\infty, 1]$

b) $\mathbb{R}^*$

c) $]1, 2] \cup [5, 6[$

d) $\mathbb{R}$

3 Inégalités dans $\mathbb{R}$

Proposition 3.1 L' ensemble $\mathbb{R}$ est muni de la **relation d'ordre** $\leq$ qui possède les propriétés suivantes :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad x \leq x$. $\quad$ (Réflexivité)
- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad$ si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$. $\quad$ (Antisymétrie)
- Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\quad$ si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$. $\quad$ (Transitivité)

Cette relation d'ordre est **totale** (on peut toujours comparer deux éléments quelconque de $\mathbb{R}$) :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \quad \text{ou} \quad y \leq x$$

Rappelons les opérations usuelles sur les inégalités dans $\mathbb{R}$. Elles sont données avec des inégalités larges mais peuvent être remplacées par des inégalités strictes et se généralisent à des encadrements.

Proposition 3.2 Soient x, y, a et b des nombres réels.

- **Règles pour les sommes :**
  - Le sens de l'inégalité n'est pas modifié si l'on additionne (ou soustrait) les deux membres par un même nombre :
  $$\text{Si } x \leq y \text{ alors } x + a \leq y + a.$$
  - On peut additionner membre à membre deux inégalités :
  $$\text{Si } a \leq x \text{ et } b \leq y \text{ alors } a + b \leq x + y.$$
- **Règles pour le produit :**
  - Le sens de l'inégalité n'est <u>pas modifié</u> si on multiplie (ou divise) les deux membres par un nombre <u>positif</u> :
  $$\text{Si } x \leq y \text{ et } a \geq 0 \text{ alors } ax \leq ay.$$
  - Le sens de l'inégalité <u>change</u> si l'on multiplie (ou divise) les deux membres par un nombre <u>négatif</u> :
  $$\text{Si } x \leq y \text{ et } a \leq 0 \text{ alors } ax \geq ay.$$
  - On peut multiplier des inégalités si tous les nombres sont <u>positifs</u> :
  $$\text{Si } 0 \leq a \leq x \text{ et } 0 \leq b \leq y \text{ alors } 0 \leq ab \leq xy.$$
- **Règle pour le passage à l'inverse**
  - On peut inverser des inégalités si les deux membres sont **de même signe** en **changeant** le sens de l'inégalité :
  $$\text{Si } x \leq y \text{ et si } x \text{ et } y \text{ sont } \underline{\text{de même signe}} \text{ alors } \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}.$$
- **Règle pour la composition avec une fonction**
  - Le sens de l'inégalité n'est pas modifié si l'on compose les deux membres par une fonction croissante :
  $$\text{Si } f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est croissante et } (x,y) \in I^2, \text{ alors : } x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$$
  - Le sens de l'inégalité change si l'on compose les deux membres par une fonction décroissante :
  $$\text{Si } f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est décroissante et } (x,y) \in I^2, \text{ alors : } x \leq y \iff f(x) \geq f(y).$$

! On prêtera une attention particulière au passage à l'inverse : la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$... Par exemple,

a) $2 \leq 3$ donc $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{3}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ (et 2 et 3 sont dans $]0, +\infty[$)

b) $-9 \leq -5$ donc $-\frac{1}{9} \geq -\frac{1}{5}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty, 0[$ (et -9 et -5 sont dans $]-\infty, 0[$)

c) $-2 \leq 1$ mais là par contre, $-\frac{1}{2} \leq 1$ (ici le «classement» est évident)

Exemple 3.3 Montrer que

$$\forall x \in [1,2], \qquad \frac{1}{8} \leq \frac{-2x+6}{3x^2+4} \leq \frac{4}{7}.$$

Exemple 3.4 Soient $x \in [1,3]$ et $y \in [2,4]$. Montrer que

$$\frac{2}{3} \leq \frac{y}{x} \leq 4.$$

La règle des signes ne fonctionne que pour les produits et les quotients, d'où la nécessité de factoriser l'expression pour résoudre une inéquation (on ne fera jamais le tableau de signe à partir d'une somme !).

Exemple 3.5 Résoudre l'inégalité suivante :

$$x + x\ln(x) \leq 0$$

Exemple 3.6 Résoudre l'inégalité suivante :

$$\frac{2x-1}{2-x} \leqslant x.$$

! Il faut faire très attention à l'élévation au carré dans une inégalité.

- Si a et b sont positifs, alors $a \leq b$ implique que $a^2 \leq b^2$ car la fonction carrée est croissante sur $[0, +\infty[$.
- Si a et b sont négatifs, alors $a \leq b$ implique que $a^2 \geq b^2$ car la fonction carrée est décroissante sur $]-\infty, 0]$.
- Si a et b sont de signe contraire, on ne dispose pas de règle générale pour comparer le carrée de deux nombres. Par exemple,

  a) $-1 \leq 2$ et $(-1)^2 \leq 2^2$ b) $-2 \leq 1$ et $(-2)^2 \geq 1^2$

Exemple 3.7 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x \leq \sqrt{1+x^2}$.

Proposition 3.8 Soient p et q deux entiers tels que $p \leq q$. Soient $u_p, \ldots, u_q, v_p, \ldots, v_q$ des nombres réels.

$$\text{Si pour tout } k \in \{p, \ldots, q\},\ \ u_k \leq v_k \quad \text{alors} \quad \sum_{k=p}^{q} u_k \leq \sum_{k=p}^{q} v_k$$

Exemple 3.9 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\frac{n+1}{2n+4} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+4} \leq \frac{n+1}{4}$$

4 Majorant, minorant, maximum, minimum borne supérieure, borne inférieure

Définition 4.1 Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Soient M et m des nombres réels.

- On dit que M est un **majorant** de A si :
$$\forall a \in A, \qquad a \leq M$$
On dit alors que la partie A est **majorée** et que A admet M comme majorant.
- On dit que m est un **minorant** de A si :
$$\forall a \in A, \qquad m \leq a$$
On dit alors que A est **minorée** et que A admet m comme minorant.
- On dit que A est **borné** si A est majoré et minoré :
$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \qquad \forall a \in \mathbb{R}, \qquad m \leq a \leq M$$

Interprétation géométrique.

Exemple 4.2 Représenter les parties de $\mathbb{R}$ suivantes et en déduire l'existence (ou non) de majorants et de minorants.

Partie de $\mathbb{R}$	Représentation	Majorants	Minorants	Partie bornée ?
$[0, 1[$				
$]-\infty, 2[$				
$\{2p \mid p \in \mathbb{N}\}$				
$\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$				

Définition 4.3 Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Soient M et m des nombres réels.

- On dit que M est le **maximum** de A si M est un majorant de A qui appartient à A :
$$\begin{cases} 1.\ \forall a \in A,\ a \leq M \\ 2.\ M \in A \end{cases}$$
- On dit que m est le **minimum** de A si m est un minorant de A qui appartient à A :
$$\begin{cases} 1.\ \forall a \in A,\ m \leq a \\ 2.\ m \in A \end{cases}$$

Preuve de l'unicité du maximum. Soient M et M' deux maximums d'une partie A de $\mathbb{R}$.

a) Comme M est un maximum de A, on a,
$$\forall a \in \mathcal{A}, \quad a \leq M$$
Or $M' \in A$ donc,
$$M' \leq M$$

b) Comme M' est un maximum de A, on a,
$$\forall a \in \mathcal{A}, \quad a \leq M'$$
Or $M \in A$ donc,
$$M \leq M'$$

Finalement, $M = M'$ (par antisymétrie de la relation d'ordre $\leq$). ■

Proposition 4.4
- Toute partie <u>non vide</u> de $\mathbb{N}$ possède un minimum.
- Toute partie <u>non vide</u> et <u>majorée</u> de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ possède un maximum.
- Toute partie <u>non vide</u> et <u>minorée</u> de $\mathbb{Z}$ possède un minimum.

Exemple 4.5 Déterminer l'existence (ou non) de minimum et de maximum des parties de $\mathbb{R}$ suivantes.

Partie de $\mathbb{R}$	Maximum	Minimum
$[0,1[$		
$]-\infty,2[$		
$\{2p \mid p \in \mathbb{N}\}$		
$\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$		

La partie $A = [0,2[$ de $\mathbb{R}$ n'admet pas de maximum mais on ne peut pas trouver de majorant de A plus petit que 2 : c'est le majorant « optimal ». On introduit donc les définitions suivantes.

Proposition 4.6 Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
- On appelle **borne supérieure** de A, notée $\sup(A)$, lorsqu'elle existe, <u>le plus petit des majorants</u> de la partie A.
- On appelle **borne inférieure** de A, notée $\inf(A)$, lorsqu'elle existe, <u>le plus grand des minorants</u> de la partie A.

Exemple 4.7 Déterminer l'existence (ou non) d'une borne supérieure et inférieure des parties de $\mathbb{R}$ suivantes.

Partie de $\mathbb{R}$	Borne supérieure	Borne inférieure
$[0,1[$		
$]-\infty,2[$		
$\{2p \mid p \in \mathbb{N}\}$		
$\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$		

Le résultat qui suit est une propriété essentielle de l'ensemble des réels. C'est de ce théorème que nous obtenons tous les grands théorèmes d'analyse au programme : théorèmes sur les suites monotones, sur les suites adjacentes, théorème des valeurs intermédiaires, théorème des accroissements finis, etc.

Proposition 4.8
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

On peut éventuellement écrire $\sup(A) = +\infty$ pour dire que A est non majorée.

Exemple 4.9 Soit

$$A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x > 0 \right\}$$

Démontrer que A admet une borne inférieure et donner la valeur de cette borne inférieure.

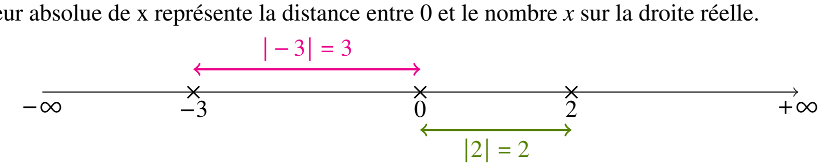
5 Valeur absolue

5.1 La valeur absolue

Définition 5.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. La *valeur absolue* de x, notée $|x|$, est le réel défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La valeur absolue de x représente la distance entre 0 et le nombre x sur la droite réelle.



Exemple 5.2 On a

a) $|17| =$ b) $|-3| =$ c) $\left|-\frac{1}{3}\right| =$

d) $|\pi - 3| =$ e) $|\sqrt{2} - 2| =$

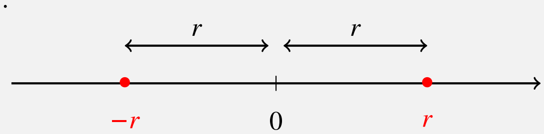
Exemple 5.3 Considérons la fonction suivante

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |3-2x| \end{array}$$

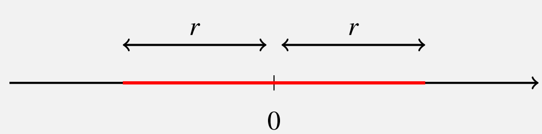
Donner une expression de f sans utiliser de valeur absolue.

Proposition 5.4 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

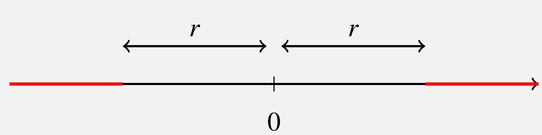
- $|x| = r \iff x = r$ ou $x = -r$.



- $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$.



- $|x| \geq r \iff x \geq r$ ou $x \leq -r$.



Exemple 5.5 Résoudre l'équation $|3+x| = 4$.

Exemple 5.6 Résoudre l'inéquation $|2x-1| \leqslant 4$.

Exemple 5.7 Résoudre l'inéquation $|x-7| > 2$.

Proposition 5.8 Soient x et y deux nombres réels. On a,

$$|x| = |y| \iff x = y \quad \text{ou} \quad x = -y$$

Exemple 5.9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|2x-4| = |x+3|$.

Proposition 5.10 — Règles de calcul pour la valeur absolue.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| \geqslant 0$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|-x| = |x|$.
3. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|xy| = |x| \times |y|$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $|x^n| = |x|^n$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$, on a $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

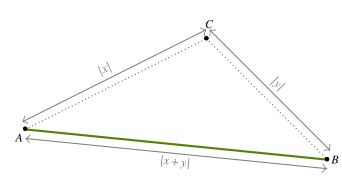
! Attention, $|x+y| \neq |x|+|y|$. Par exemple,

$$|-1+2| = |1| = 1 \quad \text{alors que} \quad |-1|+|2| = 1+2 = 3.$$

Proposition 5.11 — Inégalité triangulaire. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|.$$

? Ce théorème traduit le fait que la distance la plus courte entre deux points est la ligne droite : le plus efficace pour aller d'un point A à un point B est d'aller tout droit, sans passer par un troisième point C qui ne serait pas sur la ligne droite.



Exemple 5.12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$.

Exemple 5.13 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|(-1)^n + \frac{1}{n}\right| \leqslant 2.$$

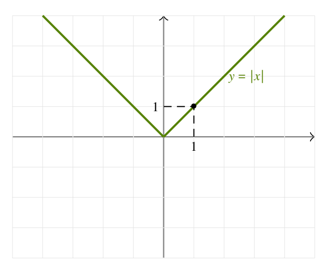
5.2 La fonction valeur absolue

Définition 5.14 La fonction *valeur absolue* est la fonction suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$$

Proposition 5.15 — Propriétés de la fonction valeur absolue.

- Le domaine de définition de la fonction valeur absolue est $\mathbb{R}$.
- La fonction valeur absolue est paire sur $\mathbb{R}$.
- La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
- La fonction valeur absolue n'admet pas de majorant sur $\mathbb{R}$ mais est minorée par 0 (ou par -1 ou ...) sur $\mathbb{R}$.



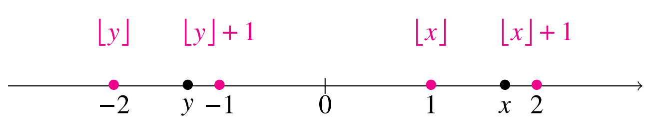
6 Partie entière

6.1 Partie entière d'un nombre réel

Définition 6.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leqslant x < n+1$$

Cet entier n est appelé la *partie entière* de x et est noté $\lfloor x \rfloor$. Autrement dit, la partie entière de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.



Exemple 6.2 Calculer les parties entières suivantes.

$$\lfloor 2.5 \rfloor = \qquad \lfloor -1.3 \rfloor = \qquad \lfloor 1 \rfloor = \qquad \lfloor \pi \rfloor =$$

Définition 6.3 La fonction *partie entière* est la fonction suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$$

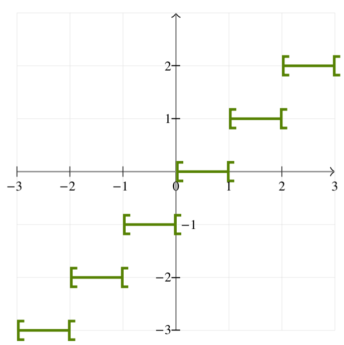
! De manière générale, pour x et y deux nombres réels,

$$\lfloor x+y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$$

Par exemple,

Proposition 6.4 — Propriétés de la fonction partie entière.
- Le domaine de définition de la fonction partie entière est $\mathbb{R}$.
- La fonction partie entière est ni paire, ni impaire sur $\mathbb{R}$.
- La fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$ (mais pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$).
- La fonction partie entière n'admet pas de majorant ni de minorant sur $\mathbb{R}$.

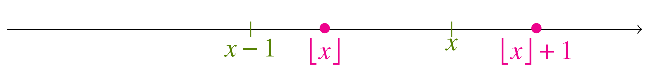
! La fonction partie entière n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $2 < 2.5$ mais $\lfloor 2 \rfloor = 2 = \lfloor 2.5 \rfloor$. Elle est constante sur tous les intervalles de la forme $[n, n+1[$, avec $n \in \mathbb{Z}$. On dit qu'elle est constante par morceaux.



! La fonction partie entière est une fonction en escalier, elle est discontinue en tout $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 6.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

a) $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ b) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$



Exemple 6.6 . Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \frac{3}{100}$.

Exemple 6.7 Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

6.2 Valeurs décimales approchées

Définition 6.8 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On appelle **valeur approchée de x à ε près** tout réel a tel que $|x - a| \leq \varepsilon$.

Proposition 6.9 Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $b_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$. Les nombres a_n et b_n sont des valeurs décimales approchées par défaut et par excès de x à la précision 10^{-n}.

Exemple 6.10 Prenons $x = \pi$. On a $\pi \simeq 3.141592$.

n	a_n	b_n
0		
1		
2		
3		
4		