TD 13 – Compléments sur les nombres réels

1 Inégalités dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 – Inéquations type «produit». Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $(-x+5)(x+3) \geq 0$ b) $x^2+2x+1 \geq 0$

c) $x^2-3x+1 \geq 1$

d) $(x+5)(x+2) < (x+5)(x-1)$

Exercice 2 – Inéquations type «quotient». Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{1}{x-4} \leq \dfrac{1}{2-x}$ b) $\dfrac{2}{x+1} \geq \dfrac{3}{x+3}$

c) $\dfrac{2(x+2)}{x+1} < \dfrac{3(x+2)}{x+3}$

Exercice 3 – Soient a et b deux réels strictement positifs distincts.

1. Montrer que $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} > 2$.
2. Montrer que $\dfrac{1}{a+b} < \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

Exercice 4 – Etablir les inégalités suivantes. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. $\forall t \in \mathbb{R}_+, \dfrac{t^2}{1+t} \leqslant t^2$.
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{x^2+y^2}{2} \geqslant |xy|$.
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2(1-x^2)+y^2(1-y^2)+2xy \leqslant 2(x^2+y^2)$.

Exercice 5 – Majoration d'une somme. On note,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

1. Montrer que,
$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2, \qquad \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}.$$
2. Déterminer deux réels a et b tels que,
$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2, \qquad \frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k}+\frac{b}{k-1}$$
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, une expression simplifiée de la somme suivante
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$
4. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2, \qquad S_n \leqslant 2-\frac{1}{n}$$

Exercice 6 – Minoration d'une somme. On note,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Montrer que, pour tout $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{k} \geq \ln(k+1)-\ln(k)$$
3. En déduire que
$$\forall n \geq 2, \qquad S_n \geq \ln(n+1)$$

2 Majorant, minorant, ect.

Exercice 7 – On considère les ensembles de nombres suivants:

a) $A =]0,4] \cup \{5\} \cup [7,+\infty[$. b) $B = \left\{1+\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$,

c) $C = \{\sin(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ d) $D = \{(-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Ces ensembles sont-ils majorés? Minorés? Préciser les bornes supérieures, inférieures, le maximum et le minimum s'ils existent. *On pourra s'appuyer sur une représentation graphique.*

Exercice 8 – Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ admettent-elles une borne supérieure et une borne inférieure? Si oui, les déterminer. *On pourra s'appuyer sur une représentation graphique.*

a) $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

b) $B = \left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m},\ (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$

Exercice 9 – Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B, \ \ a \leq b$$

Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leq \inf(B)$. A-t-on égalité ?

Exercice 10 – Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemble $A \cup B$ par

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Montrer que $A \cup B$ est bornée et exprimer sa borne supérieure et sa borne inférieure en fonction de celles de A et de B.

3 Valeur absolue

Exercice 11 – Donner une expression de la fonction f sans valeur absolue, où f est définie par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x^2-5x+6|.$$

Exercice 12 – Résolution d'(in)équations, niveau 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations/inéquations suivantes :

a) $|x+3| = 3$ b) $|x-3| \geqslant 4$

c) $|7-3x| \leqslant 5$ d) $2 \leqslant |x+1| \leqslant 3$

Exercice 13 – Résolution d'(in)équations, niveau 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations/inéquations suivantes :

a) $|3x-1| = |-1-x|$ b) $|x^2-4x+5| = |x-1|$

c) $x|x| = 3x+2$ d) $|x|+|x+1| = 2$

Exercice 14 – Démonstration d'une inégalité.

1. Démontrer que
$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \quad |2x| \leq |x+y|+|x-y|$$
2. En déduire que
$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \quad |x|+|y| \leq |x+y|+|x-y|$$

Exercice 15 – Démonstration d'une inégalité.

1. Démontrer que
$$\forall a,b \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$$
2. Démontrer que
$$\forall t,u \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } t \geqslant u, \text{ on a } \sqrt{t-u} \geq \sqrt{t}-\sqrt{u}$$
3. Démontrer que
$$\forall t,u \in \mathbb{R}, \sqrt{|t-u|} \geq |\sqrt{|t|}-\sqrt{|u|}|$$

Exercice 16 – Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que
$$\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{5}$$
Montrer que
$$\left|\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right| = 1$$

4 Partie entière

Exercice 17 – Partie entière d'une somme et d'un produit.

1. Montrer que de manière générale, pour x et y deux nombres réels.
$$\lfloor x+y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$$
2. Démontrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$
3. A-t-on pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$?
4. Montrer que,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leq n-1$$

Exercice 18 – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\lfloor (\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2 \rfloor = 4n+1.$$

Exercice 19 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par,
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Calculer $f(x)$.
2. Calculer $f(2.5)$ et $f\left(\frac{4}{3}\right)$.
3. Pour $x \in [0,1[$, simplifier l'expression de f.
4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$.
5. En déduire la courbe représentative de f.

Exercice 20 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\lfloor x \rfloor = 3$ b) $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = -1$

c) $\lfloor -x-1 \rfloor = 8$ d) $\lfloor x^2+x+1 \rfloor = 2$

Exercice 21 – Dans cet exercice, on cherche à calculer
$$S = \left\lfloor \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor$$

1. Montrer que
$$\forall k \geq 1, \quad \sqrt{k+1}-\sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k}-\sqrt{k-1}$$
2. En déduire que,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2\sqrt{n+1}-2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$$
3. En déduire la valeur de S.

Exercice 22 – Oral CCINP PC 2018. On définit la fonction f par
$$f : x \mapsto x\sqrt{\frac{1}{x}-\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que $\quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad |f(x)| \leq |x|$

Exercice 23 – En utilisant la calculatrice mais sans utiliser la fonction racine carrée de celle-ci, déterminer les approximations décimales de $\sqrt{2}$ par excès et par défaut à 10^{-3} près.