TD 13 – Compléments sur les nombres réels

1 Inégalités dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 – Inéquations type «produit». Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $(-x+5)(x+3) \geq 0$

Etape 1 : On détermine le tableau de signe de la fonction $x \mapsto (-x+5)(x+3)$.

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
Signe de $-x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(-x+5)(x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Etape 2 : On résout à l'aide du tableau de signe : La fonction $x \mapsto (-x+5)(x+3)$ est positive sur $[-3,5]$ et seulement sur $[-3,5]$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation $(-x+5)(x+3) \geq 0$ est

$$\boxed{S = [-3,5]}$$

b) $x^2+2x+1 \geq 0$

Etape 1 : On factorise l'expression :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^2+2x+1 = (x+1)^2$$

Etape 2 : On résout l'inéquation $(x+1)^2 \geq 0$:
Un carré est toujours positif ! L'inéquation $(x+1)^2 \geq 0$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où

$$\boxed{S = \mathbb{R}}$$

c) $x^2 - 3x + 1 \geq 1$

Etape 1 : On se ramène à zéro (et on factorise). Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 1 \geq 1 \quad &\iff \quad x^2 - 3x \geq 0 \\ &\iff \quad x(x-3) \geq 0. \end{aligned}$$

Etape 2 : On détermine le tableau de signe de $x \mapsto x(x-3)$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Etape 3 : On résout à l'aide du tableau de signe : La fonction $x \mapsto x(x-3)$ est positive sur $]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$ et seulement sur $]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 3x + 1 \geq 1$ ($\iff$ $x(x-3) \geq 0$) est

$$\boxed{S =]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[}$$

d) $(x+5)(x+2) < (x+5)(x-1)$

Etape 1 : On se ramène à zéro (et on factorise). Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (x+5)(x+2) < (x+5)(x-1) \quad &\iff \quad (x+5)(x+2) - (x+5)(x-1) < 0 \\ &\iff \quad (x+5)[(x+2) - (x-1)] < 0 \qquad \text{on factorise par } (x+5) \\ &\iff \quad (x+5) < 0. \end{aligned}$$

Etape 2 : On détermine le tableau de signe de $x \mapsto x+5$.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
Signe de $x+5$		$-$	0	$+$	

Etape 3 : On résout à l'aide du tableau de signe : La fonction $x \mapsto x+5$ est strictement négative sur $]-\infty, -5[$ et seulement sur $]-\infty, -5[$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation $(x+5)(x+2) < (x+5)(x-1)$ ($\iff$ $x+5 < 0$) est

$$\boxed{S =]-\infty, -5[}$$

Exercice 2 – Inéquations type «quotient». Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{1}{x-4} \leq \dfrac{1}{2-x}$

Le domaine de validité de l'équation est $\mathbb{R}\backslash\{2,4\}$.
Etape 1 : On se ramène à zéro (on passe tout à gauche). Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{2,4\}$.

$$\frac{1}{x-4} \leq \frac{1}{2-x} \iff \frac{1}{x-4} - \frac{1}{2-x} \leq 0$$

Etape 2 : On met les fractions au même dénominateur : Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{2,4\}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-4} - \frac{1}{2-x} \leq 0 &\iff \frac{2-x}{(x-4)(2-x)} - \frac{x-4}{(2-x)(x-4)} \leq 0 \\ &\iff \frac{2-x-(x-4)}{(x-4)(2-x)} \leq 0 \\ &\iff \frac{6-2x}{(x-4)(2-x)} \leq 0. \end{aligned}$$

Etape 3 : On détermine le tableau de signe de $x \mapsto \dfrac{6-2x}{(x-4)(2-x)}$:

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
Signe de $6-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $2-x$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
Signe de $\frac{6-2x}{(x-4)(2-x)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Etape 4 : On résout à l'aide du tableau de signe :
La solution de l'inéquation est

$$\boxed{S =]-\infty, 2[\cup[3,4[}$$

.

b) $\dfrac{2}{x+1} \geq \dfrac{3}{x+3}$

Le domaine de validité de l'équation est $\mathbb{R}\backslash\{-1,-3\}$.
Etape 1 : On se ramène à zéro (on passe tout à gauche). Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,-3\}$.

$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+3} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+3} \geq 0$$

Etape 2 : On met les fractions au même dénominateur : Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,-3\}$.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+3} \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{2(x+3)}{(x+1)(x+3)} - \frac{3(x+1)}{(x+1)(x+3)} \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{2x+6-3x-3}{(x+1)(x+3)} \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{-x+3}{(x+1)(x+3)} \geq 0. \end{aligned}$$

Etape 3 : On détermine le tableau de signe de $x \mapsto \dfrac{-x+3}{(x+1)(x+3)}$:

x	$-\infty$		-3		-1		3		$+\infty$
Signe de $-x+3$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $\frac{-x+3}{(x+1)(x+3)}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Etape 4 : On résout à l'aide du tableau de signe :
La solution de l'inéquation est

$$\boxed{S =]-\infty,-3[\cup]-1,3]}$$

c) $\dfrac{2(x+2)}{x+1} < \dfrac{3(x+2)}{x+3}$

Le domaine de validité de l'équation est $\mathbb{R}\setminus\{-1,-3\}$.
Etape 1 : On se ramène à zéro (on passe tout à gauche). Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,-3\}$.

$$\frac{2(x+2)}{x+1} < \frac{3(x+2)}{x+3} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2(x+2)}{x+1} - \frac{3(x+2)}{x+3} < 0$$

Etape 2 : On met les fractions au même dénominateur (en factorisant au maximum) : Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,-3\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2(x+2)}{x+1} - \frac{3(x+2)}{x+3} < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{2(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+3)} - \frac{3(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} < 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{2(x+2)(x+3) - 3(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} < 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{(x+2)[2(x+3) - 3(x+1)]}{(x+1)(x+3)} < 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{(x+2)(-x+3)}{(x+1)(x+3)} < 0
\end{aligned}$$

Etape 3 : On détermine le tableau de signe de $x \mapsto \dfrac{(x+2)(-x+3)}{(x+1)(x+3)}$:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		3		$+\infty$
Signe de $-x+3$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $x+3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
Signe de $\frac{(x+2)(-x+3)}{(x+1)(x+3)}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Etape 4 : On résout à l'aide du tableau de signe :
La solution de l'inéquation est

$$\boxed{S =]-\infty,-3[\cup]-2,-1[\cup[3,+\infty[}$$

Exercice 3 – Soient a et b deux réels strictement positifs distincts.

1. Montrer que $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}>2$.

   Soient a et b deux réels strictement positifs distincts. On a

   $$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2 &\iff a^2+b^2>2ab \text{ en multipliant par } ab>0\\ &\iff a^2-2ab+b^2>0\\ &\iff (a-b)^2>0.\end{aligned}$$

   La dernière inégalité étant vraie, on en déduit que $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}>2$.

2. Montrer que $\dfrac{1}{a+b}<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

   Soient a et b deux réels strictement positifs distincts. On a

   $$\begin{aligned}\frac{1}{a+b}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b} &\iff 1<\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b} \text{ en multipliant par } a+b>0\\ &\iff 1<2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\\ &\iff -1<\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\end{aligned}$$

   Comme a et b sont strictement positifs, cette dernière égalité est donc vraie.

Exercice 4 – Etablir les inégalités suivantes. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{t^2}{1+t} \leqslant t^2.$
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{x^2+y^2}{2} \geqslant |xy|.$
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2(1-x^2)+y^2(1-y^2)+2xy \leqslant 2(x^2+y^2).$

Exercice 5 – Majoration d'une somme. On note,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

1. Montrer que,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2, \qquad \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}.$$

Soit $k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2$. On a,

$$\begin{array}{ll} & -k \leq 0 \\ \text{donc} & k^2 - k \leq k^2 \\ \text{donc} & k(k-1) \leq k^2 \\ \text{donc} & \dfrac{1}{k(k-1)} \geq \dfrac{1}{k^2} \end{array}$$

car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

2. Déterminer deux réels a et b tels que,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2, \qquad \frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}$$

Grâce à une décomposition en éléments simples, on obtient $a = -1$ et $b = 1$.

3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, une expression simplifiée de la somme suivante

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

En reconnaissant un télescopage, on obtient,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}$$

4. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2, \qquad S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$

On sait que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2, \qquad \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. En sommant les inégalités précédentes, on obtient,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}.$$

Or,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$$

De plus,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - 1 = S_n - 1$$

Donc finalement l'inégalité devient,

$$S_n - 1 \leq 1 - \frac{1}{n}$$

c'est-à-dire

$$S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$

Exercice 6 – Minoration d'une somme. On note,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Montrer que, pour tout $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$.

   On souhaite montrer que

   $$\text{pour tout } x > -1, \quad \ln(x+1) - x \leq 0.$$

   Pour cela, on introduit la fonction suivante

   $$g : \begin{array}{rcl}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x+1) - x \end{array}$$

   La fonction g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et

   $$\text{pour tout } x \in]-1,+\infty[, \quad g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1-(x+1)}{x+1} = \frac{-x}{x+1}$$

   On en déduit le tableau de signe de la fonction g', puis les variations de g.

x	-1		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$+$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

   Du tableau de variations de g, on en déduit que

   $$\text{pour tout } x > -1, \qquad g(x) \leq 0,$$

   c'est-à-dire

   $$\text{pour tout } x > -1, \quad \ln(x+1) \leq x.$$

2. En déduire que

   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \;\; \frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$$

   D'après la question précédente,

   $$\forall x > -1, \qquad x \geq \ln(1+x)$$

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $\frac{1}{k} > -1$, on obtient,

   $$\frac{1}{k} \geq \ln(1+\frac{1}{k})$$

   De plus,

   $$\ln(1+\frac{1}{k}) = \ln(\frac{1+k}{k}) = \ln(k+1) - \ln(k)$$

   Ainsi,

   $$\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$$

3. En déduire que

   $$\forall n \geq 2, \qquad S_n \geq \ln(n+1)$$

Pour tout $n \geqslant 1$ et $k \in \{1,\dots,n\}$, on a
$$\frac{1}{k} \geqslant \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$
Donc, en sommant ces inégalités, on obtient, pour tout $n \geqslant 1$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$
Or, par télescopage, on obtient, pour tout $n \geqslant 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) = \ln(n+1)$$
Et donc, finalement,
$$\forall n \geqslant 2, \qquad S_n \geqslant \ln(n+1)$$

2 Majorant, minorant, ect.

Exercice 7 – On considère les ensembles de nombres suivants. Ces ensembles sont-ils majorés? Minorés? Préciser les bornes supérieures, inférieures, le maximum et le minimum s'ils existent. *On pourra s'appuyer sur une représentation graphique.*

a) $A =]0,4] \cup \{5\} \cup [7,+\infty[$.

- Non majoré.
- Minoré par 0.
- $\sup(A) = +\infty$
- $\inf(A) = 0$
- Pas de maximum
- Pas de minimum

b) $B = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$,

- Majoré par 2.
- Minoré par 1.
- $\sup(B) = 2$
- $\inf(B) = 1$
- Maximum qui vaut 2.
- Pas de minimum.

c) $C = \{\sin(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

- Majoré par 1
- Minoré par -1.
- $\sup(C) = 1$
- $\inf(C) = -1$
- Maximum qui vaut 1.
- Minimum qui vaut -1.

d) $D = \{(-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- Non majoré.
- Non minoré.
- $\sup(D) = +\infty$
- $\inf(D) = -\infty$
- Pas de maximum.
- Pas de minimum.

Exercice 8 – Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ admettent-elles une borne supérieure et une borne inférieure? Si oui, les déterminer. *On pourra s'appuyer sur une représentation graphique.*

a) $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ $\quad$ $\sup(A) = \frac{3}{2}$ et $\inf(A) = -1$

b) $B = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m},\ (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$ $\quad$ $\sup(B) = 2$ et $\inf(B) = 0$

Exercice 9 – Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ \ a \leq b \qquad (H)$$

Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leq \inf(B)$. A-t-on égalité ?

- Existence de $\sup(A)$. On sait que B est non vide : il existe $b_0 \in B$. Ainsi, (H) donne

  $$\forall a \in A, \qquad a \leq b_0$$

  Donc la partie A est majorée (par b_0). De plus, par hypothèse, la partie A est non vide. Elle admet donc une borne supérieure.
- Existence de $\inf(B)$.On prouve de même l'existence de $\inf(B)$.
- Soit $b \in B$. D'après (H),

  $$\forall a \in A, \qquad \sup(A) \leq b$$

  Ainsi b est un majorant de la partie A. Or, $\sup(A)$ est le plus petit majorant de A. Donc,

  $$\sup(A) \leq b$$

  Ainsi, on a prouvé que

  $$\forall b \in B, \qquad \sup(A) \leq b$$

  Ce qui veut dire que $\sup(A)$ est un minorant de la partie B. Or $\inf(B)$ est le plus grand minorant donc,

  $$\sup(A) \leq \inf(B).$$

Exercice 10 – Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemble $A \cup B$ par

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Montrer que $A \cup B$ est bornée et exprimer sa borne supérieure et sa borne inférieure en fonction de celles de A et de B.

On peut montrer que

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B)) \qquad \text{et} \qquad \inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$$

Les parties A et B sont bornées et non vides. Elles admettent donc chacune une borne supérieure. De plus, comme par exemple A est non vide, $A \cup B$ est non vide. De plus,

$$\forall x \in A \cup B, \qquad x \leq \max(\sup(A), \sup(B))$$

En effet, si $x \in A \cup B$,

- soit $x \in A$ et alors, $x \leq \sup(A) \leq \max(\sup(A), \sup(B))$,
- soit $x \in B$ et alors $x \leq \sup(B) \leq \max(\sup(A), \sup(B))$,

Ainsi, la partie $A \cup B$ est majorée. Elle admet donc une borne supérieure. De plus, l'inégalité précédente permet de déduire que

$$\sup(A \cup B) \leq \max(\sup(A), \sup(B))$$

Il reste à montrer que

$$\max(\sup(A), \sup(B)) \leq \sup(A \cup B)$$

Pour se simplifier, on suppose que $\sup(A) \leq \sup(B)$ et ainsi,

$$\max(\sup(A), \sup(B)) = \sup(B).$$

Il reste donc à montrer que

$$\sup(B) \leq \sup(A \cup B)$$

Soit $b \in B$. Alors $b \in A \cup B$ et donc,

$$b \leq \sup(A \cup B)$$

Ceci étant vrai, pour tout $b \in B$, on en déduit que

$$\sup(B) \leq \sup(A \cup B)$$

3 Valeur absolue

Exercice 11 – Donner une expression de la fonction f sans valeur absolue, où f est définie par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x^2 - 5x + 6|.$$

Par définition de la valeur absolue, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{si } x^2 - 5x + 6 \leq 0 \\ -(x^2 - 5x + 6) & \text{si } x^2 - 5x + 6 < 0 \end{cases}$$

On peut alors déterminer le signe du polynôme du second degré $x \mapsto x^2 - 5x + 6$. Comme $\Delta = 1 > 0$, ce polynôme admet deux racines réelles qui sont données par 2 et 3. Ainsi, on obtient le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
Signe de $x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{si } x \in]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[\\ -(x^2 - 5x + 6) & \text{si } x \in]2, 3[\end{cases}$$

Exercice 12 – Résolution d'(in)équations, niveau 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations/inéquations suivantes :

a) $|x+3|=3$

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}|x+3|=3 &\Leftrightarrow x+3=3 \text{ ou } x+3=-3\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=-6\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est:

$$\{0,-6\}$$

b) $|x-3|\geqslant 4$

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}|x-3|\geqslant 4 &\Leftrightarrow x-3\geqslant 4 \text{ ou } x-3\leqslant -4\\ &\Leftrightarrow x\geqslant 7 \text{ ou } x\leqslant -1\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est

$$]-\infty,-1]\cup[7,+\infty[$$

c) $|7-3x|\leqslant 5$

Soit $x\in\mathbb{R}$ On a

$$\begin{aligned}|7-3x|\leqslant 5 &\Leftrightarrow -5\leqslant 7-3x\leqslant 5\\ &\Leftrightarrow -12\leqslant -3x\leqslant -2\\ &\Leftrightarrow 12\geqslant 3x\geqslant 2\\ &\Leftrightarrow 4\geqslant x\geqslant \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est:

$$\left[\frac{2}{3},4\right]$$

d) $2\leqslant |x+1|\leqslant 3$

$$S=[-4,-3]\cup[1,2]$$

Exercice 13 – Résolution d'(in)équations, niveau 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations/inéquations suivantes :

a) $|3x-1| = |-1-x|$

L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} |3x-1| = |-1-x| &\iff 3x-1 = -1-x \text{ ou } 3x-1 = 1+x \\ &\iff 4x = 0 \text{ ou } 2x = 2 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathscr{S} = \{0,1\}$.

b) $|x^2-4x+5| = |x-1|$

L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} |x^2-4x+5| = |x-1| &\iff x^2-4x+5 = x-1 \text{ ou } x^2-4x+5 = -(x-1) \\ &\iff x^2-5x+6 = 0 \text{ ou } x^2-3x+4 = 0 \\ &\iff (x-2)(x-3) = 0 \text{ ou } x^2-3x+4 = 0. \end{aligned}$$

Or l'équation $x^2-3x+4=0$ n'a pas de solutions car de discriminant $\Delta = 9-16 = -7$ strictement négatif, L'ensemble des solutions est donc $\mathscr{S} = \{2,3\}$.

c) $x|x| = 3x+2$

L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- 1er cas: $x \geq 0$. Alors $x|x| = 3x+2 \iff x^2 = 3x+2 \iff x = \frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$ (après calcul du discriminant, la racine devant être positive).
- 2ieme cas: $x < 0$. Alors $x|x| = 3x+2 \iff -x^2 = 3x+2 \iff (x+1)(x+2) = 0 \iff x = -1$ ou $x = -2$.

L'ensemble des solutions est donc $\mathscr{S} = \{-1,-2,\frac{1}{2}(3+\sqrt{17}\}$.

d) $|x|+|x+1| = 2$

On a,

$$S = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

Exercice 14 – Démonstration d'une inégalité.

1. Démontrer que

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \quad |2x| \leq |x+y|+|x-y|$$

Soit x et y deux réels. On sait que

$$|2x| = |x+x| = |x+y+x-y|$$

Donc, en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient que

$$|2x| \leq |x+y|+|x-y|$$

2. En déduire que

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \quad |x|+|y| \leq |x+y|+|x-y|$$

Soit x et y deux réels. D'après la question précédente, on a,

$$|x| \leq \frac{1}{2}(|x+y|+|x-y|)$$

Or, on peut montrer de même que

$$|y| \leq \frac{1}{2}(|x+y|+|x-y|)$$

Et donc, en sommant ces deux égalités, on obtient,

$$|x|+|y| \leq |x+y|+|x-y|$$

Exercice 15 – Démonstration d'une inégalité.

1. Démontrer que
$$\forall a,b \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

   Soient a et b deux nombres réels positifs. On peut commencer par remarquer que
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b$$
   Or, $2\sqrt{a}\sqrt{b} \leq 0$, donc,
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \leq a+b$$
   On obtient alors, en passant à la racine carrée, qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$,
$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{a+b}$$
   car $\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = |\sqrt{a}+\sqrt{b}| = \sqrt{a}+\sqrt{b}$ par positivité.

2. Démontrer que
$$\forall t,u \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } t \geqslant u, \text{ on a } \sqrt{t-u} \geq \sqrt{t}-\sqrt{u}$$

   Soient t et u deux nombres réels positifs, avec $t \geq u$. Comme $t-u$ et u sont positifs, en utilisant l'inégalité de la question précédente, on obtient,
$$\sqrt{t-u+u} \leq \sqrt{t-u}+\sqrt{u}$$
   c'est-à-dire
$$\sqrt{t} \leq \sqrt{t-u}+\sqrt{u}$$
   et donc,
$$\sqrt{t-u} \geq \sqrt{t}-\sqrt{u}$$

3. Démontrer que
$$\forall t,u \in \mathbb{R}, \sqrt{|t-u|} \geq |\sqrt{|t|}-\sqrt{|u|}|$$

   Soient t et u deux nombres réels. On souhaite montrer que
$$-\sqrt{|t-u|} \leq \sqrt{|t|}-\sqrt{|u|} \leq \sqrt{|t-u|}$$
   Commençons par montrer que
$$\sqrt{|t|}-\sqrt{|u|} \leq \sqrt{|t-u|}$$
   D'après l'inégalité triangulaire, on a,
$$|t| = |t-u+u| \leq |t-u|+|u|$$
   Or, la fonction racine carrée étant croissante sur $[0,+\infty[$, on obtient,
$$\sqrt{|t|} \leq \sqrt{|t-u|+|u|}$$
   En utilisant l'inégalité de la question 1, on obtient alors,
$$\sqrt{|t|} \leq \sqrt{|t-u|+|u|} \leq \sqrt{|t-u|}+\sqrt{|u|}$$
   Ainsi, on a bien montrée que
$$\sqrt{|t|}-\sqrt{|u|} \leq \sqrt{|t-u|}$$
   La seconde inégalité se montre de même.

Exercice 16 – Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{5}$$

Montrer que

$$\left| \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right| = 1$$

On sait que

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{5}$$

Donc, en élevant au carré cette égalité, on trouve que

$$5 = \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 = \frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a}$$

D'où

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$$

On a alors,

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right|^2 &= \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \\ &= \frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a} \\ &= 3 - 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la racine carrée, on obtient

$$\left| \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right| = 1 \qquad \text{ou} \qquad \cancel{\left| \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right| = -1}$$

la deuxième possibilité étant impossible car une valeur absolue est positive.

4 Partie entière

Exercice 17 – Partie entière d'une somme et d'un produit.

1. Montrer que de manière générale, pour x et y deux nombres réels.

$$\lfloor x+y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$$

On a, par exemple,

$$\lfloor 5.7+(-0.1) \rfloor = 5 \qquad \text{alors que} \qquad \lfloor 5.7 \rfloor + \lfloor -0.1 \rfloor = 5-1=4$$

2. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \ \ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Par définition de $\lfloor x \rfloor$, on sait que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Et donc,

$$\lfloor x \rfloor + n \leq x+n < \lfloor x \rfloor + n + 1$$

Ainsi, $k = \lfloor x \rfloor + n$ est un entier (car $\lfloor x \rfloor$ est un entier) vérifiant

$$k \leq x+n < k+1$$

C'est donc la partie entière de $x+n$:

$$\lfloor x+n \rfloor = k = \lfloor x \rfloor + n$$

3. A-t-on pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$?

Faux en général. On a, par exemple,

$$\lfloor 2 \times 12 \rfloor = 1 \qquad \text{alors que} \qquad 2\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$$

4. Montrer que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ 0 \leq \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leq n-1$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Par définition de la partie entière,

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

En multipliant par $n \geq 0$, on a donc

$$n\lfloor x \rfloor \leq nx < n\lfloor x \rfloor + n$$

• D'une part, on a donc $n\lfloor x \rfloor \leq nx$ et $n\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$. Or la partie entière de nx est le plus grand entier inférieur ou égal à nx. On en déduit que $n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$. Donc $0 \leq \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor$.
• On a également $nx < n\lfloor x \rfloor + n$ et $n\lfloor x \rfloor + n \in \mathbb{N}$. Or $\lfloor nx \rfloor + 1$ est le plus petit entier strictement supérieur à nx. On en déduit que $\lfloor nx \rfloor + 1 \leq n\lfloor x \rfloor + n$. Donc $\lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leq n-1$.
D'où

$$0 \leq \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leq n-1$$

Exercice 18 – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \rfloor = 4n + 1.$$

Exercice 19 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Calculer $f(x)$.
2. Calculer $f(2.5)$ et $f\left(\frac{4}{3}\right)$.
3. Pour $x \in [0,1[$, simplifier l'expression de f.
4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$.
5. En déduire la courbe représentative de f.

Exercice 20 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\lfloor x \rfloor = 3$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\lfloor x \rfloor = 3 \iff 3 \leq x < 4$$

Donc

$$S = [3,4[$$

b) $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = -1$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = -1 &\iff -1 \leq \frac{1}{x} < 0 \\ &\iff x \leq -1 \end{aligned}$$

Donc

$$S =]-\infty, -1]$$

c) $\lfloor -x-1 \rfloor = 8$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned} \lfloor -x-1 \rfloor = 8 &\iff 8 \leq -x-1 < 9 \\ &\iff 9 \leq -x < 10 \\ &\iff -10 < x \leq -9 \end{aligned}$$

Donc

$$S =]-10, -9]$$

d) $\lfloor x^2+x+1 \rfloor = 2$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned} \lfloor x^2+x+1 \rfloor = 2 &\iff 2 \leq x^2+x+1 < 3 \\ &\iff x^2+x+1 \geq 2 \text{ et } x^2+x+1 < 3 \\ &\iff x^2+x-1 \geq 0 \text{ et } x^2+x-2 < 0 \end{aligned}$$

Après calculs (non détaillés ici), on trouve,

$$S =]-2, \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})] \cup [\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1), 1[$$

Exercice 21 – Dans cet exercice, on cherche à calculer

$$S = \left\lfloor \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor$$

1. Montrer que

$$\forall k \geq 1,\ \ \sqrt{k+1} - \ \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$$

Soit $k \geq 1$.
- On a

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

Or

$$\sqrt{k+1}+\sqrt{k} > \sqrt{k}+\sqrt{k} = 2\sqrt{k}$$

Donc

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

- De même,

$$\sqrt{k}-\sqrt{k-1} = \frac{(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$$

Or

$$\sqrt{k}+\sqrt{k-1} < \sqrt{k}+\sqrt{k} = 2\sqrt{k}$$

Donc

$$\sqrt{k}-\sqrt{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} > \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

Finalement,

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k}-\sqrt{k-1}$$

2. En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2\sqrt{n+1}-2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$$

En sommant l'encadrement précédent, on obtient donc

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right),$$

soit, par télescopage,

$$\sqrt{n+1}-1 < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{n}$$

soit

$$2\sqrt{n+1}-2 < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$$

3. En déduire la valeur de S.

Grâce à la question précédente,

$$\sqrt{10^4+1}-1 < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10^4}\frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{10^4} = 100.$$

Or

$$\sqrt{10^4+1}-1 \geq \sqrt{10^4}-1 = 100-1 = 99$$

Donc, $99 \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10^4}\frac{1}{\sqrt{k}} \leq 100$. Donc,

$$\left\lfloor \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10^4}\frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor = 99$$

Exercice 22 – Oral CCINP PC 2018. On définit la fonction f par

$$f : x \mapsto x\sqrt{\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

   La valeur 0 est clairement interdite. De plus, par définition de la partie entière,

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$$

   En particulier,

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq 0$$

   Ceci montre que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

2. Montrer que

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \ |f(x)| \leq |x|$$

   Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Par définition de la partie entière,

   $$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$$

   En particulier,

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$$

   Donc, par croissance de la racine carrée sur $[0, +\infty[$ (les deux quantités étant positives, cf Question 1), on a,

   $$\sqrt{\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor} \leq 1$$

   Ainsi,

   $$|f(x)| = |xl \times \sqrt{\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor} \leq |x|$$

Exercice 23 – En utilisant la calculatrice mais sans utiliser la fonction racine carrée de celle-ci, déterminer les approximations décimales de $\sqrt{2}$ par excès et par défaut à 10^{-3} près.