# 14. Étude d'une suite numérique

Dans ce chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 1 Notion de suite

**Définition 1.1** Une suite de réels (ou de complexes) est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$)

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ n & \mapsto & u(n) \end{array}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n)$ est noté $u_n$, et est appelé terme général de la suite.
- La suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et l'ensemble des suites complexes est noté $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

! Certaines suites ne sont pas définies sur tout $\mathbb{N}$. De manière générale, si une suite n'est définie qu'à partir du rang $n_0$, on note $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

| Terme général | Premier terme licite | Notation de la suite |
|---|---|---|
| $\frac{1}{n}$ | | |
| $\sqrt{n-2}$ | | |
| $\ln(n)$ | | |
| $\frac{1}{n^2+1}$ | | |

### 1.1 Modes de définition d'une suite

On peut définir une suite de plusieurs façons.

- De manière **explicite** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est directement exprimé en fonction de $n$. Ainsi, tous les termes de la suite se calculent de manière directe.
- Par **récurrence** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est exprimé en fonction d'un ou plusieurs termes précédents $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$.
- De manière **implicite** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ vérifie une certaine propriété donnée dépendant de $n$. Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3 + x - 1 = n$. Dans ce cas, on a rarement accès aux valeurs de la suite. *Ce type de suites sera étudié dans un autre chapitre.*

**Exemple 1.2**

| Définition | Explicite/Réc. ? | Calcul des premiers termes | | |
|---|---|---|---|---|
| $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n}$ | | | | |
| $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n^2 - 1$ | | | | |
| $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = (-1)^n + 2$ | | | | |
| $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$ | | | | |
| $w_0 = 0$, $w_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$ | | | | |

## 1.2 Représentation graphique

Pour étudier une suite, et en particulier étudier son comportement "à l'infini", on peut la représenter graphiquement pour essayer de "voir" ce qu'il se passe.

#### Pour les suites définies de manière explicite.

On peut représenter graphiquement une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de manière explicite de deux manières différentes.

- On peut placer **dans le plan** les points de coordonnées $(n, u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- On peut aussi représenter la suite comme un ensemble de valeurs **le long d'un axe**.

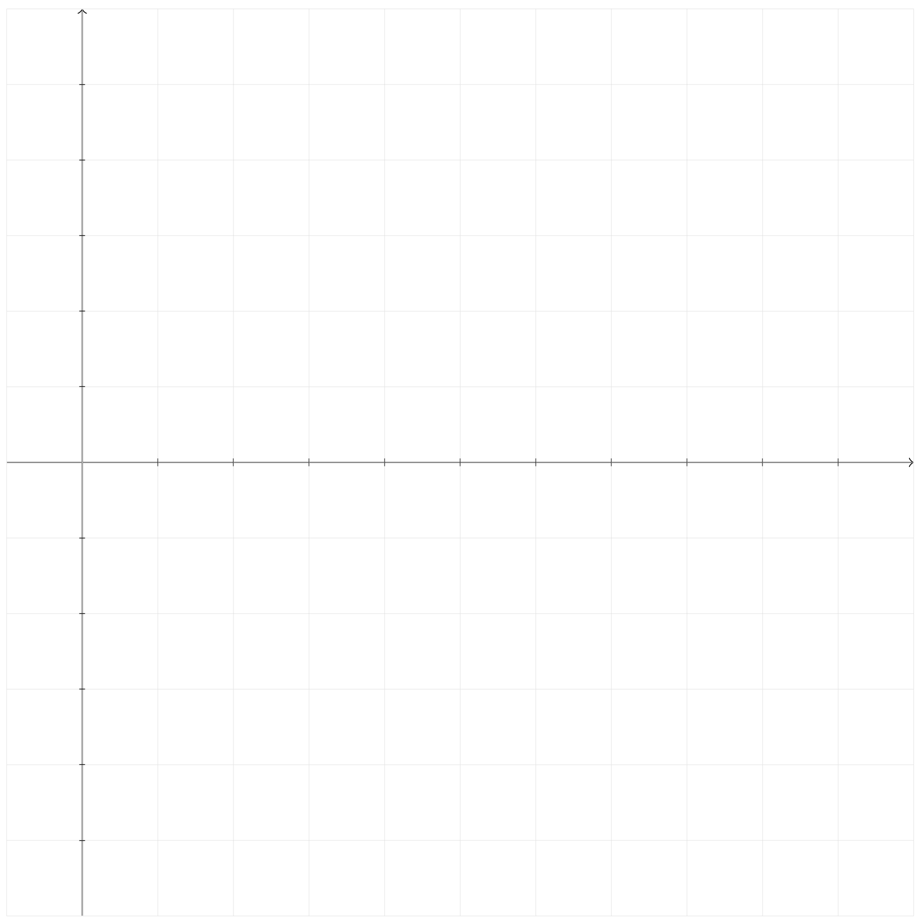
**Exemple 1.3** Représentons graphiquement, des deux manières différentes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n^2 - 5.$$

Pour s'aider, on peut calculer les premiers termes de la suite

$$u_0 = \qquad\qquad u_1 = \qquad\qquad u_2 = \qquad\qquad u_3 = \qquad\qquad \dots$$

- Dans un premier temps, on peut placer dans le plan les points $(n, u_n)$.



- Dans un second temps, on peut placer les valeurs de la suite le long d'un axe.



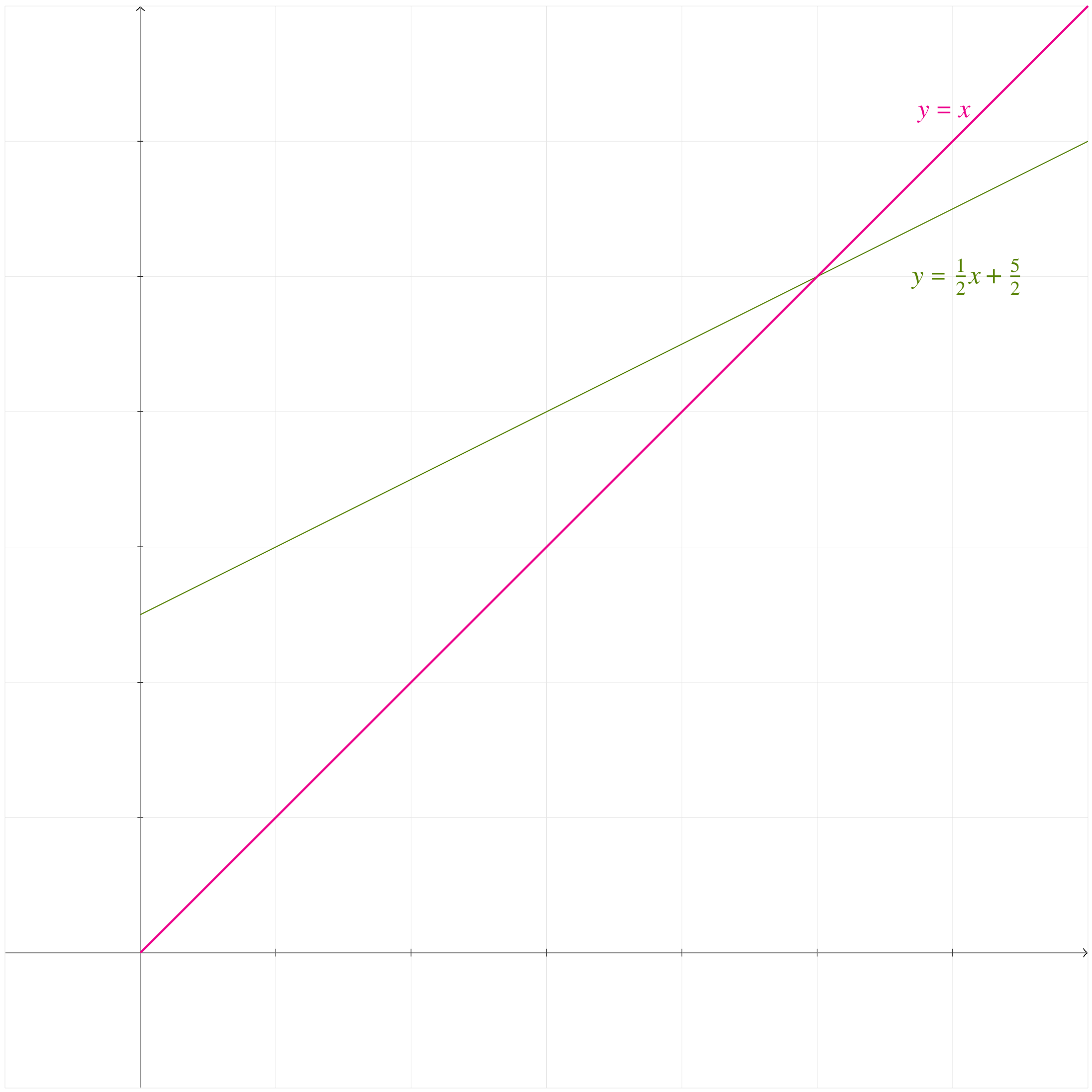
#### Pour les suites définies de manière implicite.

Pour représenter graphiquement, dans le plan, une suite définie définie par récurrence, on peut

- calculer les premiers termes de la suite à la main et les placer sur le graphique,
- soit construire directement sa représentation graphique à l'aide de la droite $y = x$.

**Exemple 1.4** Représentons graphiquement, sans calculer les premiers termes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{5}{2}.$$




On peut vérifier à la main les premières valeurs

$$u_0 = \qquad u_1 = \qquad u_2 = \qquad u_3 = \qquad \ldots$$

# 2 Étude qualitative d'une suite

## 2.1 Variation d'une suite

**Définition 2.1 — Suite constante & Suite stationnaire.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *réelle ou complexe*.

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante** si :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n.$$

  Dans ce cas, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = C$.

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang :

$$\text{il existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} = u_n.$$

**Exemple 2.2** Étudions la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = |u_n^2 - 2| \end{cases}$$

**Définition 2.3 — Monotonie d'une suite.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *réelle*.

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}.$$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_{n+1}.$$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- Lorsque les inégalités sont strictes, on dit que la suite est **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

### Comment étudier les variations d'une suite ?

Pour étudier la monotonie, on dispose de plusieurs méthodes.

- **Méthode 1 - Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ :**
$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}$$
- Méthode 2 - Si on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 :
$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}$$
- Méthode 3 - Passer par l'étude d'une fonction. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$, on peut étudier les variations de $f$ pour en déduire celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Méthode 4 - On peut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

**Exemple 2.4** Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par,

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \dfrac{n}{n+1}$

b) $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n^2 + v_n + 2$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \dfrac{1}{5^n}$

**Exemple 2.5** Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \exp(n)$.

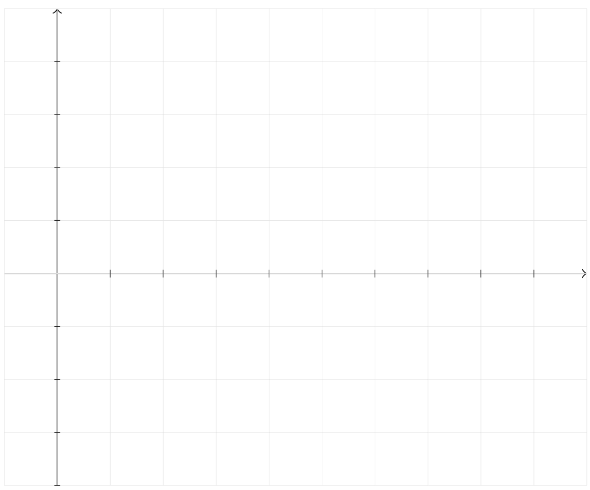
## 2.2 Suites majorées/minorées/bornées

**Définition 2.6** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *réelle*.

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** s'il existe un réel $M$ tel que
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M.$$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** s'il existe un réel $m$ tel que
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m.$$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si elle est majorée et minorée.

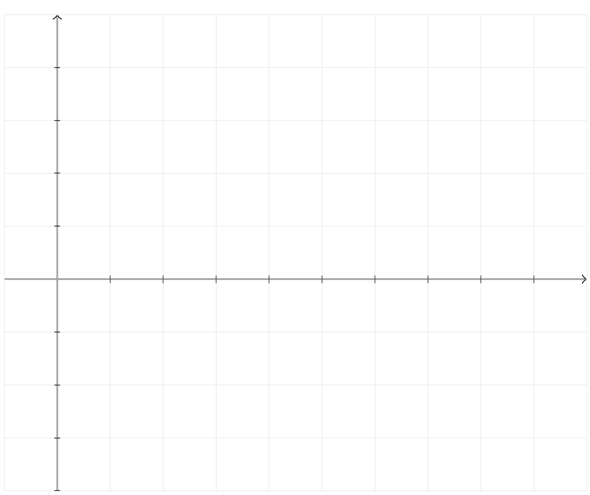
**Exemple 2.7** Déterminer si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ est majorée/minorée/bornée.

**Gestes Invisibles/Automatismes.** Pour conjecturer la bornitude d'une suite (ou non), on peut la représenter graphiquement pour avoir une idée de son comportement.



**Exemple 2.8** Déterminer si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ est majorée/minorée/bornée.

**Gestes Invisibles/Automatismes.** Pour conjecturer la bornitude d'une suite (ou non), on peut la représenter graphiquement pour avoir une idée de son comportement.



**Proposition 2.9** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $M \in \mathbb{R}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $M$ si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $M$.

*Démonstration.* Cette proposition provient de l'équivalence suivante,

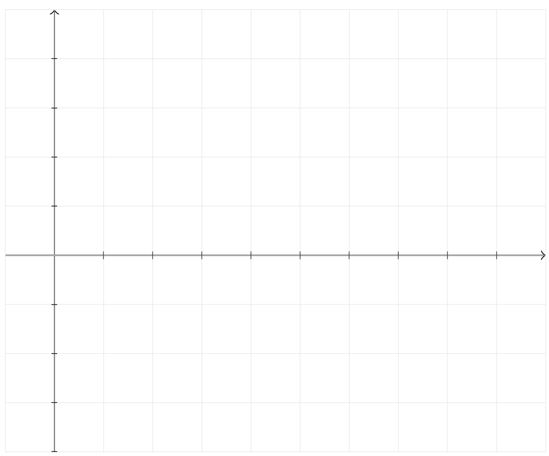
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ -M \leqslant u_n \leqslant M.$$

■

**Exemple 2.10** Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée où,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

**Gestes Invisibles/Automatismes.** Pour conjecturer la bornitude d'une suite (ou non), on peut la représenter graphiquement pour avoir une idée de son comportement.



**Exemple 2.11** Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée où,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = (-1)^n - \frac{1}{2n}.$$

**Gestes Invisibles/Automatismes.** Comme on ne connaît pas le signe de la suite que l'on étudie, pour montrer le caractère borné d'une suite, on majore la valeur absolue de la suite.

**Exemple 2.12** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{\sin(\pi n + 1)}{n^2 + 1}$$

**Gestes Invisibles/Automatismes.** Comme on ne connaît pas le signe de la suite que l'on étudie, pour montrer le caractère borné d'une suite, on majore la valeur absolue de la suite.

**Définition 2.13** Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *complexe*. On dit que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si la suite *réelle* $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

**Exemple 2.14** Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée où

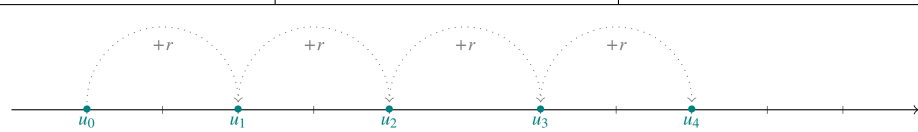
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_n = \mathrm{e}^{in}$$

# 3 Suites remarquables

## 3.1 Suites arithmétiques

**Définition 3.1** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** si l'**écart** entre deux termes consécutifs est **constant**.

| Paramètres | Relation de récurrence | Expression explicite |
|---|---|---|
| Premier terme : $u_0$ – Raison : $r$ | Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ | Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$ |
| Premier terme : $u_p$ – Raison : $r$ | Pour tout $n \geqslant p$, $u_{n+1} = u_n + r$ | Pour tout $n \geqslant p$, $u_n = u_p + (n-p)r$ |

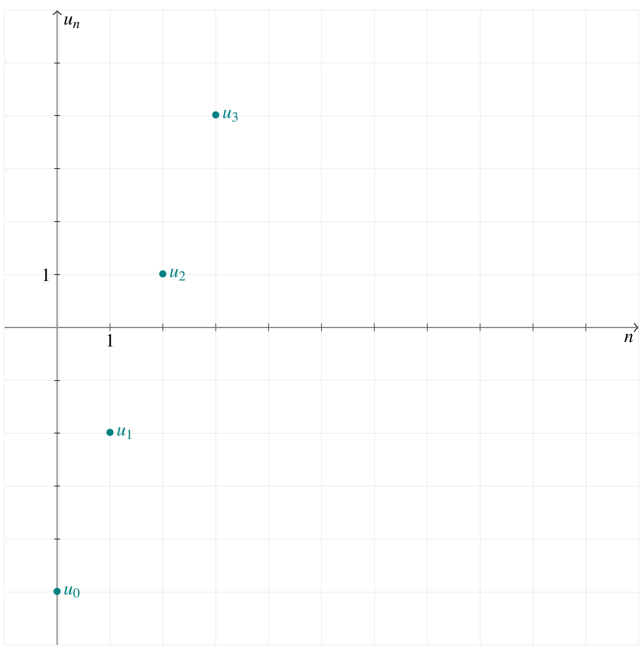


**Exemple 3.2**

| Suite | Arithm. ? | Raison | 1^er terme | Terme général |
|---|---|---|---|---|
| $u_0 = 11$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$ | | | | |
| Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$ | | | | |
| Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4n + 5$ | | | | |
| $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 1$ | | | | |
| Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ | | | | |
| $u_2 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $u_{n+1} = u_n + 1$ | | | | |

**Vérification.** On n'oublie pas de vérifier que les formules explicites sont bien valables au moins pour le premier terme de la suite.

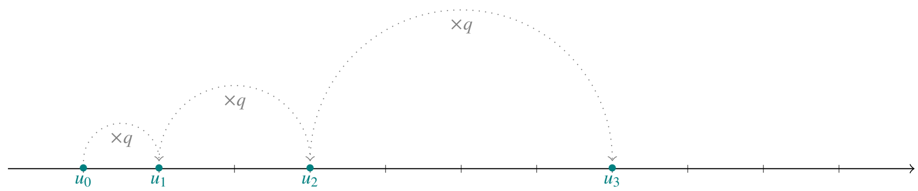
**Exemple 3.3** Proposer une expression explicite de la suite représentée graphiquement ci-dessous.



## 3.2 Suites géométriques

**Définition 3.4** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** si le **rapport** entre deux termes consécutifs est **constant**.

| Paramètres | Relation de récurrence | Expression explicite |
|---|---|---|
| Premier terme : $u_0$ – Raison : $q$ | Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$ | Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$ |
| Premier terme : $u_p$ – Raison : $q$ | Pour tout $n \geqslant p$, $u_{n+1} = q \times u_n$ | Pour tout $n \geqslant p$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$ |




*Preuve de l'expression explicite à partir de la relation de récurrence.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par son premier terme $u_0$ et par la relation de récurrence suivante,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = q \times u_n.$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$. **Gestes Invisibles/Automatismes.** On souhaite montrer qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel. On pense au raisonnement par récurrence.

Montrons par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante est vraie,

$$\mathcal{P}(n) : \quad « \; u_n = u_0 \times q^n \; »$$

- Initialisation. Montrons que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que $u_0 = u_0 \times q^0$.

  Par convention, $q^0 = 1$. Donc $u_0 \times q^0 = u_0 \times 1 = u_0$.
  Donc, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, on suppose que

  $$u_n = u_0 \times q^n.$$

  Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que

  $$u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}.$$

  **Gestes Invisibles/Automatismes.** Pour faire marcher l'hérédité, il faut comprendre le lien entre $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$, c'est-à-dire ici le lien entre $u_n$ et $u_{n+1}$. On remarque alors que l'énoncé nous indique que $u_{n+1} = q \times u_n$.

  Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n = u_0 \times q^n$.
  Or, d'après l'énoncé, $u_{n+1} = q \times u_n$.
  En combinant ces deux informations, on obtient que $u_{n+1} = q \times u_0 \times q^n = u_0 \times q^{n+1}$.
  Donc, la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion. Par principe de récurrence, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

■

**Exemple 3.5**

| Suite | Géo. ? | Raison | $1^{\text{er}}$ terme | Terme général |
|---|---|---|---|---|
| $u_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n$ | | | | |
| Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$ | | | | |
| Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 7^n$ | | | | |
| $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -u_n$ | | | | |
| $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 3u_n$ | | | | |

**Vérification.** On n'oublie pas de vérifier que les formules explicites sont bien valables au moins pour le premier terme de la suite.

## 3.3 Suites arithmético-géométrique

**Définition 3.6** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe $a, b \in \mathbb{K}^2$ tel que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

- Si $a = 1$, la suite est arithmétique de raison $b$
- Si $b = 0$, la suite est géométrique de raison $a$

### Comment déterminer l'expression d'une suite arithmético-géométrique ?

Pour déterminer l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

1. On commence par résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ell = a\ell + b$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \ell$.
3. On montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q$ à déterminer.
4. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$.
5. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ell + v_n = \ell + v_0 \times q^n$.

**Exemple 3.7** Déterminons l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = 5$ et par la relation de récurrence, donnée par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

## 3.4 Suites récurrentes linéaire d'ordre 2

**Définition 3.8** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe $(a,b) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}^*$ tels que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

**Proposition 3.9 — Cas coefficients complexes.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **récurrente linéaire d'ordre 2** telle que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

avec $a$ et $b$ *deux nombres complexes*. L'équation $r^2 = ar + b$ est appelée **équation caractéristique** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons $\Delta$ le discriminant de cette équation. Trois cas sont alors possibles.

| | Racines de l'éq. carac. | Terme général de la suite |
|---|---|---|
| $\Delta \neq 0$ | Deux racines distinctes : $r_1, r_2$ | Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$ |
| $\Delta = 0$ | Une racine : $r_0$ | Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (A + Bn)r_0^n$ |

avec $A$ et $B$ deux constantes *complexes* (à déterminer éventuellement à partir des deux premiers termes de la suite).

**Exemple 3.10** Déterminer le terme général des suites récurrente linéaire d'ordre 2 suivante.

| Relation | Éq. carac. | Racines | Terme général |
|---|---|---|---|
| $\forall n,\ z_{n+2} = (2+2i)z_{n+1} - 2iz_n$ | | | |
| $\forall n,\ z_{n+2} = 2z_{n+1} - 2z_n$ | | | |

**Proposition 3.11 — Cas coefficients réels.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **récurrente linéaire d'ordre 2** telle que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

avec $a$ et $b$ *deux nombres réels*. L'équation $r^2 = ar + b$ est appelée **équation caractéristique** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons $\Delta$ le discriminant de cette équation. Trois cas sont alors possibles.

| | Racines de l'éq. carac. | Terme général de la suite |
|---|---|---|
| $\Delta > 0$ | Deux racines réelles distinctes : $r_1, r_2$ | Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$ |
| $\Delta = 0$ | Une racine réelle : $r_0$ | Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (A + Bn)r_0^n$ |
| $\Delta < 0$ | Deux racines complexes $\rho e^{\pm i\theta}$ | Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \rho^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$ |

avec $A$ et $B$ deux constantes *réelles* (à déterminer éventuellement à partir des deux premiers termes de la suite).

**Exemple 3.12** Déterminer le terme général des suites récurrente linéaire d'ordre 2 suivante.

| Relation | Éq. carac. | Racines | Terme général |
|---|---|---|---|
| $\forall n,\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ | | | |
| $\forall n,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ | | | |
| $\forall n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ | | | |

**Exemple 3.13** Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, $v_0 = 0$, $v_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 6v_{n+1} - 9v_n$.