TD 14 – Étude d'une suite numérique

Exercice 1 – Récurrences en vrac. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 11$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n$. Montrer par récurrence que
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 11 \times 5^n$$
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n + 2$. Montrer par récurrence que,
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad 3 < v_n < 5$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Montrer par récurrence que,
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1 Étude qualitative d'une suite

Exercice 2 – Calcul des termes d'une suite. Dans chaque cas, donner les quatre premiers termes des suites suivantes.

1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n+1}{2n+1}.$$
2. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 2$ et
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n + 2^n.$$
3. On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_0 = 1$, $w_1 = -2$ et
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = 2w_n - w_{n+1}.$$

Exercice 3 – Suite stationnaire. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par
$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = |u_n^2 - 2| \end{cases}$$
On pourra commencer par calculer les quatre premiers termes de la suite pour comprendre ce qu'il se passe.

Exercice 4 – Monotonie d'une suite. Étudier le sens de variation des suites de termes généraux suivants.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 5 - 3^n$ *(avec la Méthode 1)*

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n-1}{n+2}$ *(avec la Méthode 1)*

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n - n^2$ *(avec la Méthode 1)*

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{2^n}{n}$ *(avec la Méthode 2)*

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}$ *(avec la Méthode 2)*

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=0}^{n}(1+3^k)$ *(avec la Méthode 2)*

g) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{-2n}\binom{2n}{n}$ *(Méthode à choisir)*

h) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^k}{k}$ *(Méthode à choisir)*

Exercice 5 – Monotonie d'une suite. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(-x) - 1$$
et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

1. Montrer que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante *(avec la Méthode 3)*.

Exercice 6 – Suites bornées. Montrer que les suites de termes généraux suivants sont bornées.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{2n}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (-1)^n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2} + \sin(2^n)$

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_n = \dfrac{2n+1}{n+1} + e^{-n}$

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \dfrac{3\cos(2n)}{4} + (-1)^n \arctan\left(\frac{4}{n}\right)$

Exercice 7 – Suites bornées. Déterminer si les suites suivantes sont majorées/minorées/bornées *(on pourra représenter graphiquement les premiers termes de la suite pour conjecturer le caractère majoré/minoré/borné de la suite).*

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = (-1)^n$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; v_n = (-1)^n \times n$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; w_n = \sin(n)$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; z_n = \frac{2n^2+1}{n+1}$

2 Suites remarquables

Exercice 8 – Suites arithmétiques. Pour chacune des suites, déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

$$1)\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$
$$2)\begin{cases} u_0 = -2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$$
$$3)\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{5} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 9 – Suites géométriques. Pour chacune des suites, déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

$$1)\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = 7u_n \end{cases}$$
$$2)\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = -3u_n \end{cases}$$
$$3)\begin{cases} u_1 = 4 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \; u_{n+1} = \frac{1}{11}u_n \end{cases}$$

Exercice 10 – Suites arithmético-géométriques. Pour chacune des suites, déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

$$1)\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = 4u_n - 6 \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{l} u_0 = -\frac{1}{4} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Exercice 11 – Suites récurrences linéaires d'ordre 2. Pour chacune des suites, déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

$$1)\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1, u_1 = 9 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{array}\right.$$

$$3)\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \end{array}\right.$$

Exercice 12 – Nature de la suite à savoir identifier. Donner le terme général des suites définies ci-dessous.

a) $b_1 = 3$ et pour tout $n \geq 2$, $2b_n = b_{n-1}$,

b) $c_1 = 10$ et pour tout $n \geq 1$, $c_{k+1} - c_k = 3$

c) $u_0 = 0$ et pour tout $j \geq 1$, $3u_j - 2u_{j-1} = 1$.

d) $h_0 = 1$, $h_1 = 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $h_{p+2} = 2h_p$.

3 Approfondissement

Exercice 13 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique telle que

$$u_2 = 4 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=4}^{11} u_k = 164$$

Déterminer la raison de cette suite.

Exercice 14 – On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

1. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Préciser sa valeur.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3. Déterminer les termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 15 – Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante grâce à un raisonnement par récurrence.

Exercice 16 – Écrit Ecricome ECS 2018.

1. On note
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
   (a) Montrer que $\varphi > 1$.
   (b) Montrer que les réels φ et $-\frac{1}{\varphi}$ sont les solutions de l'équation suivante
$$x^2 - x - 1 = 0.$$
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$
Justifier qu'il existe des réels A et B tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A\varphi^n + B\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n.$$

Exercice 17 – Oral MP Mines-Télécom 2024. On considère la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ définie par,

$$\forall n \geqslant 1, \quad p_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}$$

1. Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par 2.

Exercice 18 – Écrit Ecricome ECT 2024. Dans cet exercice, on considère trois suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et $(c_n)_{n\geqslant 1}$ définie par la donnée des premiers termes

$$a_1 = \frac{3}{8} \qquad b_1 = 0 \qquad c_1 = \frac{5}{8}$$

et par les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = \frac{2}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{3}{11}c_n \\ b_{n+1} = \frac{4}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n \\ c_{n+1} = \frac{5}{11}a_n + \frac{5}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n \end{array}\right.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $a_n + b_n + c_n = 1$.

On définit trois suites auxiliaires $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $(y_n)_{n\geqslant 1}$ et $(z_n)_{n\geqslant 1}$ par les relations suivantes : pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{aligned} x_n &= a_n + b_n + c_n \\ y_n &= -a_n + 2b_n - c_n \\ z_n &= -5a_n - 5b_n + 7c_n \end{aligned}$$

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.
3. Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{11}$.
4. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de y_n en fonction de n.
5. Montrer que la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique.
6. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de z_n en fonction de n.
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$b_n = \frac{1}{3}(x_n + y_n) \qquad \text{et} \qquad c_n = \frac{1}{12}(5x_n + y_n)$$
8. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de x_n, de y_n et de z_n.
9. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de a_n, de b_n et de c_n en fonction n.