TD 14 – Étude d'une suite numérique (Correction)

Exercice 1 – Récurrences en vrac. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 11$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n$. Montrer par récurrence que
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 11 \times 5^n$$

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 11$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n$ Montrons par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante est vraie
$$\mathscr{P}(n): \quad « \qquad u_n = 11 \times 5^n \qquad »$$

- Initialisation. Montrons que la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que
$$u_0 = 11 \times 5^0$$
D'une part, d'après l'énoncé,
$$u_0 = 11$$
D'autre part,
$$11 \times 5^0 = 11 \times 1 = 11$$
Donc,
$$u_0 = 11 \times 5^0$$
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité. On suppose que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire on sait que
$$u_n = 11 \times 5^n$$
Montrons que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que
$$u_{n+1} = 11 \times 5^{n+1}$$
On a,
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5u_n && \text{d'après l'énoncé} \\ &= 5 \times 11 \times 5^n \\ &= 11 \times 5^{n+1} && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 11 \times 5^n}$$

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n + 2$. Montrer par récurrence que,
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad 3 < v_n < 5$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n + 2$. Montrons par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante est vraie
$$\mathscr{P}(n): \quad « \qquad 3 < v_n < 5 \qquad »$$

- Initialisation. Montrons que la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que
$$3 < v_0 < 5$$
D'après l'énoncé,
$$v_0 = 4$$
Donc, on a bien,
$$3 < v_0 < 5$$
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité. On suppose que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire on sait que
$$3 < v_n < 5$$
Montrons que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que
$$3 < v_{n+1} < 5$$
On a,
$$\begin{array}{rll} & 3 < v_n < 5 & \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ \text{donc} & \frac{9}{5} < \frac{3}{5}v_n < 3 & \\ \text{donc} & \frac{19}{5} < \frac{3}{5}v_n + 2 < 5 & \\ \text{donc} & \frac{19}{5} < v_{n+1} < 5 & \text{d'après l'énoncé} \\ \text{donc en particulier} & 3 < \frac{19}{5} < v_{n+1} < 5 & \text{d'après l'énoncé} \end{array}$$
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 11 \times 5^n}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Montrer par récurrence que,
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Montrons par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante est vraie
$$\mathscr{P}(n): \quad « \qquad S_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad »$$

- Initialisation. Montrons que la propriété $\mathscr{P}(1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que
$$S_1 = \frac{1 \times (1+1)}{2}$$
Par construction,
$$S_1 = 1$$
De plus,
$$\frac{1 \times (1+1)}{2} = 1$$
Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité. On suppose que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire on sait que
$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$
Montrons que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que
$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

On a,

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= 1+2+\cdots+n+(n+1) \\
&= S_n+(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \qquad \text{en utilisant l'hypothèse de récurrence} \\
&= (n+1)\times\left(\frac{n}{2}+1\right) \\
&= (n+1)\times\frac{n+2}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, \qquad S_n=\frac{n(n+1)}{2}}$$

1 Étude qualitative d'une suite

Exercice 2 – Calcul des termes d'une suite. Dans chaque cas, donner les quatre premiers termes des suites suivantes.

1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n+1}{2n+1}.$$

On a,

$$\boxed{u_0 = 1, \qquad u_1 = \frac{2}{3}, \qquad u_2 = \frac{3}{5}, \qquad u_3 = \frac{4}{7}}$$

2. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 2$ et

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n + 2^n.$$

On a,

$$\boxed{v_0 = 2, \qquad v_1 = 3, \qquad v_2 = 5, \qquad v_3 = 9}$$

3. On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_0 = 1$, $w_1 = -2$ et

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = 2w_n - w_{n+1}.$$

On a,

$$\boxed{w_0 = 1, \qquad w_1 = -2, \qquad w_2 = 4, \qquad w_3 = -8}$$

Exercice 3 – Suite stationnaire. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = |u_n^2 - 2| \end{cases}$$

On pourra commencer par calculer les quatre premiers termes de la suite pour comprendre ce qu'il se passe.

On peut commencer par calculer les premiers termes de la suite. On sait que

$$u_0 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Puis on peut calculer que

$$u_1 = |u_0^2 - 2| = \left|\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 - 2\right| = |2+\sqrt{3}-2| = \sqrt{3}$$

De même, on a

$$u_2 = lu_1^2 - 2| = |(\sqrt{3})^2 - 2| = 1$$

puis

$$u_3 = |u_2^2 - 2| = |1^2 - 2| = |-1| = 1$$

Ainsi, on conjecture que

$$\forall n \geq 2, \qquad u_n = 1$$

Montrons par récurrence, que pour tout $n \geq 2$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante est vraie

$$\mathscr{P}(n): \quad « \qquad u_n = 1 \qquad »$$

- Initialisation. Montrons que la propriété $\mathscr{P}(2)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que

$$u_2 = 1$$

  D'après nos calculs précédents, on sait que $u_2 = 1$. Donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
- Hérédité. On suppose que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \geq 2$, c'est-à-dire on sait que

$$u_n = 1$$

  Montrons que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que

$$u_{n+1} = 1$$

  D'après l'énoncé, on sait que $u_{n+1} = |u_n^2 - 2|$. Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on sait aussi que $u_n = 1$. Donc $u_{n+1} = |1^2 - 2| = |-1| = 1$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout $n \geqslant 2$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \geq 2, \qquad u_n = 1}$$

Exercice 4 – Monotonie d'une suite. Étudier le sens de variation des suites de termes généraux suivants.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 5 - 3^n$ *(avec la Méthode 1)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = -2 \times 3^n \leqslant 0$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{décroissante.}}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n-1}{n+2}$ *(avec la Méthode 1)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{(n+3)(n+2)} \geqslant 0$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{croissante.}}$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n - n^2$ *(avec la Méthode 1)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = -2n \geqslant 0$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{décroissante.}}$

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{2^n}{n}$ *(avec la Méthode 2)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n}{n+1}$$

Or,

$$\begin{array}{ll} & n \geq 1 \\ \text{donc} & 2n \geq n+1 \\ \text{donc} & \dfrac{2n}{n+1} \geq 1 \end{array}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$, on en déduit que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} \geqslant u_n$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{croissante.}}$

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}$ *(avec la Méthode 2)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{n+1}\sqrt{n} \geqslant (\sqrt{n})^2 = n \geqslant 1$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$, on en déduit que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} \geqslant u_n$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{croissante.}}$

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=0}^{n} (1+3^k)$ *(avec la Méthode 2)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1+3^{n+1} \geqslant 1$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$, on en déduit que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} \geqslant u_n$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{croissante.}}$

g) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{-2n}\binom{2n}{n}$ *(Méthode à choisir)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)}{2(n+1)} \leqslant 1$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$, on en déduit que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} \leqslant u_n$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{décroissante.}}$

h) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k}$ *(Méthode à choisir)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \geqslant 0$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{croissante.}}$

Exercice 5 – Monotonie d'une suite. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(-x) - 1$$

et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

1. Montrer que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = -\exp(-x) \leqslant 0$$

   Donc f est $\boxed{\text{décroissante sur } \mathbb{R}.}$

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante *(avec la Méthode 3)*.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que

   $$\begin{array}{lll} & n \leqslant n+1 & \\ \text{donc} & f(n) \geqslant f(n+1) & \text{car } f \text{ décroit sur } \mathbb{R} \\ \text{c-a-d} & u_n \geqslant u_{n+1} & \end{array}$$

   D'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\boxed{\text{décroissante.}}$

Exercice 6 – Suites bornées. Montrer que les suites de termes généraux suivants sont bornées.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{2n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que

$$\begin{array}{ll} & n \geq 1 \\ \text{donc} & \dfrac{1}{n} \leq 1 \text{ car la fonction } x \mapsto \dfrac{1}{x} \text{ décroit sur }]0, +\infty[\\ \text{donc} & \dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{1}{2} \end{array}$$

De plus, comme n est un entier naturel (donc positif) on a aussi

$$\frac{1}{2n} \geq 0$$

Ainsi, on a,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}}$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{bornée.}}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

On a,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |v_n| = 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1 \qquad \text{car } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \geq 0$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad -1 \leq v_n \leq 1}$$

Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{bornée.}}$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$

On a, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |w_n| \leqslant |\frac{1}{n}| + |(-1)^n| \leq \frac{1}{n} + 1 \leqslant 2$$

Donc, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{bornée.}}$

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2} + \sin(2^n)$

On a, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |z_n| \leqslant |\frac{(-1)^n}{n^2}| + |\sin(2^n)| \leq \frac{1}{n^2} + 1 \leqslant 2$$

Donc, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{bornée.}}$

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_n = \dfrac{2n+1}{n+1} + \mathrm{e}^{-n}$

D'une part, on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{2n+1}{n+1} = \frac{n+n+1}{n+1} = \frac{n}{n+1} + 1 \leq 2$$

D'autre part, par croissance de l'exponentielle,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{e}^{-n} \leq 1$$

On a donc en sommant les deux inégalités,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant \lambda_n \leqslant 2+1 \leqslant 3$$

(La minoration provient du fait que tous les termes sont positifs.) Donc, la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{bornée.}}$

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \dfrac{3\cos(2n)}{4} + (-1)^n \arctan\left(\frac{4}{n}\right)$

On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ |\cos(x)| \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \ \ |\arctan(x)| \leq \frac{\pi}{2}$$

Donc, en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |\alpha_n| \leqslant \frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}$$

Donc, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{bornée.}}$

Exercice 7 – Suites bornées. Déterminer si les suites suivantes sont majorées/minorées/bornées *(on pourra représenter graphiquement les premiers termes de la suite pour conjecturer le caractère majoré/minoré/borné de la suite).*

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$

On a,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |u_n| = 1 \leqslant 1$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{bornée.}}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (-1)^n \times n$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{non minorée}}$ mais $\boxed{\text{non majorée}}$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n| = +\infty$)

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \sin(n)$

On a (par propriété de la fonction sinus)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |w_n| \leqslant 1$$

(ou autrement dit,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad -1 \leq w_n \leqslant 1)$$

Donc, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{bornée.}}$

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \frac{2n^2+1}{n+1}$

La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{minorée par } 0}$ (car tous les termes sont positifs) mais $\boxed{\text{non majorée}}$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$).

2 Suites remarquables

Exercice 8 – Suites arithmétiques. Pour chacune des suites, déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \;\; u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$

On reconnait une suite **arithmétique** de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 3. Ainsi, son terme général est donné par

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 1 + 3n}$$

b) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \;\; u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$

On reconnait une suite **arithmétique** de premier terme $u_0 = -2$ et de raison -4. Ainsi, son terme général est donné par

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = -2 - 4n}$$

c) $\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{5} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \;\; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2} \end{cases}$

(Attention : la suite n'est définie qu'à partir de $n = 1$ ce qui décale tout...) On reconnait une suite **arithmétique** de premier terme $u_1 = -\frac{1}{5}$ et de raison $\frac{1}{2}$. Ainsi, son terme général est donné par

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2}(n-1) = -\frac{7}{10} + \frac{1}{2}n}$$

Exercice 9 – Suites géométriques. Pour chacune des suites, déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 7u_n \end{cases}$

On reconnait une suite **géométrique** de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 7. Ainsi, son terme général est donné par

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 1 \times 7^n = 7^n}$$

b) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -3u_n \end{cases}$

On reconnait une suite **géométrique** de premier terme $u_0 = 2$ et de raison -3. Ainsi, son terme général est donné par

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2 \times (-3)^n}$$

c) $\begin{cases} u_1 = 4 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{1}{11}u_n \end{cases}$

(Attention : la suite n'est définie qu'à partir de $n = 1$ ce qui décale tout...) On reconnait une suite **géométrique** de premier terme $u_1 = 4$ et de raison $\frac{1}{11}$. Ainsi, son terme général est donné par

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = 4 \times \left(\frac{1}{11}\right)^{n-1}}$$

Exercice 10 – Suites arithmético-géométriques. Pour chacune des suites, déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4u_n - 6 \end{cases}$

On reconnaît une suite **arithmético-géométrique**. On applique la méthode correspondante.

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On a
$$\ell = 4\ell - 6 \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 3\ell \quad \Leftrightarrow \quad \ell = 2$$
2. Posons
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - 2.$$
3. Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 4u_n - 6 - 2 = 4u_n - 8 = 4(u_n - 2) = 4v_n$$
Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -1$.
4. On en déduit que,
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_n = -1 \times 4^n = -4^n$$
5. On en déduit que,
$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + 2 = -4^n + 2}$$

Vérification. On vérifie que la formule est en adéquation, au moins avec le premier terme de la suite. En effet, la formule donne
$$u_0 = -4^0 + 2 = -1 + 2 = 1 \qquad \checkmark$$

b) $\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{4} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2} \end{cases}$

De même, on montre que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

Exercice 11 – Suites récurrences linéaires d'ordre 2. Pour chacune des suites, déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

a) $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$

On reconnaît une suite **récurrente linéaire d'ordre 2**. Pour obtenir des informations sur le terme général de cette suite, on étudie l'équation caractéristique.

- L'équation caractéristique associée à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est donnée par
$$r^2 = 3r - 2 \qquad \text{c-à-d} \qquad r^2 - 3r + 2 = 0$$
- On reconnait une équation du second degré dont le discriminant est donné par $\Delta = 1$. Comme $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles qui est données par
$$r_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad r_2 = 2$$
- Donc, on en déduit qu'il existe deux constantes A et B telle que
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A \times 1^n + B \times 2^n = A + B \times 2^n$$
- On détermine enfin les valeurs des deux constantes A et B grâce aux deux premiers termes de la suite. En effet, les deux constantes A et B doivent vérifier le système suivant, que l'on résout ensuite, grâce à la méthode du pivot de Gauss (ou par substitution),
$$\begin{cases} A + B \times 2^0 &= 0 \\ A + B \times 2^1 &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B &= 0 \\ A + 2B &= 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B &= 0 \\ B &= 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A &= -1 \\ B &= 1 \end{cases}$$
- Conclusion. On en déduit que le terme général de la suite est donné par
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = -1 + 2^n}$$

Vérification. On vérifie que la formule est en adéquation, au moins avec le premier terme de la suite (voir le deuxième). En effet, la formule donne

$$\begin{aligned} u_0 &= -1 + 2^0 = -1 + 1 = 0 \qquad \checkmark \\ u_1 &= -1 + 2^1 = -1 + 2 = 1 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

b) $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 9 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$

De même, on montre que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (1 + 17n)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

c) $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n \end{array}\right.$

De même, on montre que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \times 2 \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}$$

Exercice 12 – Nature de la suite à savoir identifier. Donner le terme général des suites définies ci-dessous.

a) $b_1 = 3$ et pour tout $n \geq 2$, $2b_n = b_{n-1}$,

D'après l'énoncé, on sait que $b_1 = 3$ et que

$$\forall n \geq 2, \qquad b_n = \frac{1}{2} b_{n-1}$$

On reconnaît une suite **géométrique** de premier terme 3 et de raison $\frac{1}{2}$ (avec un décalage, la suite n'est définie qu'à partir de $n = 1$). Donc, le terme général est donné par

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad b_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

b) $c_1 = 10$ et pour tout $n \geq 1$, $c_{k+1} - c_k = 3$

D'après l'énoncé, on sait que $c_1 = 10$ et

$$\forall k \geq 1, \qquad c_{k+1} = c_k + 3$$

On reconnaît une suite **arithmétique** de premier terme 10 et de raison 3 (avec un décalage, la suite n'est définie qu'à partir de $n = 1$). Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ c_n = 10 + 3(n-1) = 7 + 3n}$$

c) $u_0 = 0$ et pour tout $j \geq 1$, $3u_j - 2u_{j-1} = 1$.

D'après l'énoncé, $u_0 = 0$ et

$$\forall j \geq 1, \qquad u_j = \frac{2}{3} u_{j-1} + \frac{1}{3}$$

On reconnaît une suite **arithmético-géométrique**. En appliquant la méthode, on obtient,

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*, \ u_j = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^j}$$

d) $h_0 = 1$, $h_1 = 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $h_{p+2} = 2h_p$.

On peut montrer par récurrence que,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad h_n = \begin{cases} 2^{n/2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}}$$

3 Approfondissement

Exercice 13 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique telle que

$$u_2 = 4 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=4}^{11} u_k = 164$$

Déterminer la raison de cette suite.

D'après l'énoncé, la suite $(u_n)_{n\ \in\mathbb{N}}$ est une suite **arithmétique** de premier terme $u_2 = 4$ et de raison que l'on peut noter r. Ainsi, son terme général est donné par

$$\forall k \geqslant 2,\ \ u_k = u_2 + (k-2)r = 4 + (k-2)r$$

D'une part, d'après l'énoncé, on sait que

$$\sum_{k=4}^{11} u_k = 164$$

D'autre part, en utilisant la formule donnant le terme général de la suite, on a,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=4}^{11} u_k &= \sum_{k=4}^{11} (4 + (k-2)r) \\
&= 4\sum_{k=4}^{11} 1 + r\sum_{k=4}^{11}(k-2) \\
&= 4 \times (11-4+1) + r\sum_{i=2}^{9} i \\
&= 32 + r(\sum_{i=1}^{9} i - 1) \\
&= 32 + r(\frac{9\times 10}{2} - 1) \\
&= 32 + 444r.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient,

$$32 + 44r = 164$$

soit

$$r = \frac{164-32}{44} = \frac{132}{44} = 3$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmétique de $\boxed{\text{raison 3.}}$

Exercice 14 – On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

1. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Préciser sa valeur.

   Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - u_n$. Montrons que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. On peut commencer par constater que, en utilisant les relations de récurrence données par l'énoncé,

   $$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+1} - w_n &= v_{n+1} - u_{n+1} - (v_n - u_n) \\ &= 2u_n + 3v_n - (3u_n + 2v_n) - (v_n - u_n) \\ &= 2u_n + 3v_n - 3u_n - 2v_n - v_n + u_n \\ &= 0\end{aligned}$$

   Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Donc,

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ w_n = w_0 = v_0 - u_0 = 1$$

   c'est-à-dire

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n - u_n = 1}$$

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

   On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\begin{aligned}u_{n+1} &= 3u_n + 2v_n && \text{d'après la relation de récurrence du cours} \\ &= 2u_n + 2(1 + u_n) && \text{car d'après la question précédente, pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n = 1 \\ &= 5u_n + 2\end{aligned}$$

   Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite $\boxed{\text{arithmético-géométrique.}}$

3. Déterminer les termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **arithmético-géométrique**. En appliquant la méthode (non détaillée ici), on trouve que,

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{3}{2} \times 5^n - \frac{1}{2}}$$

   Or, on sait d'après la question 1 que,

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n - u_n = 1$$

   On en déduit que

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_n + 1 = \frac{3}{2} \times 5^n + \frac{1}{2}}$$

Exercice 15 – Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

   Démontrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$, la propriété $\mathscr{P}(n)$: «$0 \leqslant u_n \leqslant 2$» est vraie.

   - *Initialisation.* On sait que $u_0 = 0$. Donc $0 \leq u_0 \leq 2$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité.* On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire on suppose que
     $$0 \leqslant u_n \leqslant 2$$
     Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que
     $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$$
     On a,
     $$\begin{array}{lll} & 0 \leqslant u_n \leqslant 2 & \text{d'après l'hyp. de rec} \\ \text{donc} & 2 \leqslant u_n + 2 \leqslant 4 & \\ \text{donc} & \sqrt{2} \leqslant \sqrt{u_n+2} \leqslant 2 & \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ croit sur } [0,+\infty[\\ \text{c-a-d} & \sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2 & \text{d'après la relation de rec de l'énoncé} \\ \text{donc en particulier} & 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2 & \end{array}$$
     Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.
   - *Conclusion.* Ainsi, d'après le principe de récurrence, on a démontré qu e
     $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant 2}$$

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante grâce à un raisonnement par récurrence.

   Démontrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$, la propriété $\mathscr{P}(n)$: «$u_n \leqslant u_{n+1}$» est vraie.

   - *Initialisation.* On sait que $u_0 = 0$ et que $u_1 = \sqrt{2}$. Donc $u_0 \leq u_1$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité.* On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire on suppose que
     $$u_n \leqslant u_{n+1}$$
     Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que
     $$u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$$
     On sait que
     $$\begin{array}{lll} & u_n \leqslant u_{n+1} & \text{d'après l'hyp. de rec} \\ \text{donc} & u_n + 2 \leqslant u_{n+1} + 2 & \\ \text{donc} & \sqrt{u_n+2} \leqslant \sqrt{u_{n+1}+2} & \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ croit sur } [0,+\infty[\\ \text{c-a-d} & u_{n+1} \leqslant u_{n+2} & \text{en utilisant l'hyp de rec de l'énoncé} \end{array}$$
     Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.
   - *Conclusion.* Ainsi, par principe de récurrence, on a démontré que
     $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant u_{n+1}$$
     et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\boxed{\text{croissante.}}$

Exercice 16 – Écrit Ecricome ECS 2018.

1. On note
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

   (a) Montrer que $\varphi > 1$.

   On a $4 < 5 < 9$. Donc, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient
$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$$
   c'est-à-dire
$$2 < \sqrt{5} < 3.$$
   Donc $\sqrt{5} > 2$. Donc, en ajoutant 1 puis en multipliant par $\frac{1}{2} > 0$, on obtient
$$\boxed{\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \boxed{> 1}$$

   (b) Montrer que les réels φ et $-\frac{1}{\varphi}$ sont les solutions de l'équation suivante
$$x^2 - x - 1 = 0.$$
   Dans un premier temps, on a
$$\begin{aligned}\boxed{\varphi^2 - \varphi - 1} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1\\ &= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1\\ &= \frac{1+2\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5}-4}{4}\\ &\boxed{= 0}\end{aligned}$$
   Donc φ est bien une solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Dans un second temps, on a
$$\begin{aligned}\boxed{\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\varphi}\right) - 1} &= \frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi} - 1\\ &= \frac{1+\varphi-\varphi^2}{\varphi^2}\\ &= -\frac{\varphi^2-\varphi-1}{\varphi^2}\\ &\boxed{= 0}\end{aligned}$$
   en utilisant la relation que l'on vient de démontrer sur φ. Ainsi $-\frac{1}{\varphi}$ est aussi une solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Justifier qu'il existe des réels A et B tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A\varphi^n + B\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **récurrente linéaire d'ordre** 2. Pour trouver le terme général, on commence par regarder l'équation caractéristique donnée par

$$r^2 = r + 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad r^2 - r - 1 = 0.$$

Or, d'après la question 1(c), les réels φ et $-\frac{1}{\varphi}$ sont solutions de cette équation. Comme c'est une équation de second degré, elle peut admettre au plus deux solutions, donc on a bien trouvé toutes les solutions. Donc, il existe deux constantes A et B telles que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A\varphi^n + B\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n}$$

Exercice 17 – Oral MP Mines-Télécom 2024. On considère la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ définie par,

$$\forall n \geqslant 1, \quad p_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$$

1. Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre p_{n+1} et p_n.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a,

$$\begin{aligned}\boxed{p_{n+1}} &= \frac{1!+2!+\cdots+n!+(n+1)!}{(n+1)!} \\ &= \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n+1)!} \\ &= \frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!\times(n+1)} + 1 \\ &\boxed{= \frac{p_n}{n+1} + 1}\end{aligned}$$

2. En déduire que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par 2.

   Démontrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, la propriété $\mathscr{P}(n)$: «$p_n \leqslant 2$» est vraie.
   - *Initialisation.* On sait que $p_1 = 1$. Donc $p_1 \leqslant 2$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   - *Hérédité.* On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire on suppose que
   $$p_n \leq 2$$
   Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que
   $$p_{n+1} \leq 2$$
   D'après la question précédente, on sait que
   $$p_{n+1} = \frac{p_n}{n+1} + 1$$
   Donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient que,
   $$p_{n+1} \leqslant \frac{2}{n+1} + 1$$
   et donc,
   $$p_{n+1} \leqslant \frac{2}{n+1} + 1 \leqslant \frac{2}{2} + 1 = 2$$
   D'où $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.
   - *Conclusion.* Ainsi, d'après le principe de récurrence, on a montré que
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n \leq 2}$$

Exercice 18 – Écrit Ecricome ECT 2024. Dans cet exercice, on considère trois suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et $(c_n)_{n\geqslant 1}$ définie par la donnée des premiers termes

$$a_1 = \frac{3}{8} \qquad b_1 = 0 \qquad c_1 = \frac{5}{8}$$

et par les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{3}{11}c_n \\ b_{n+1} = \frac{4}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n \\ c_{n+1} = \frac{5}{11}a_n + \frac{5}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $a_n + b_n + c_n = 1$.

On définit trois suites auxiliaires $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $(y_n)_{n\geqslant 1}$ et $(z_n)_{n\geqslant 1}$ par les relations suivantes : pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{aligned} x_n &= a_n + b_n + c_n \\ y_n &= -a_n + 2b_n - c_n \\ z_n &= -5a_n - 5b_n + 7c_n \end{aligned}$$

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.
3. Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{11}$.
4. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de y_n en fonction de n.
5. Montrer que la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique.
6. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de z_n en fonction de n.
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = \frac{1}{3}(x_n + y_n) \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{12}(5x_n + y_n)$$

8. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de x_n, de y_n et de z_n.
9. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de a_n, de b_n et de c_n en fonction n.