DS 2

Samedi 8 novembre, de 8h à 11h

Les règles à respecter sont les suivantes.

① *Aucun document n'est autorisé.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***

② *Les candidat·e·s sont invité·e·s à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible leurs résultats.*

③ *Pour augmenter la* ***lisibilité*** *des calculs, dans la mesure du possible, les égalités successives seront présentées en colonne (et non pas en ligne) avec les différents symboles = bien alignés.*

④ *Les* ***pages*** *doivent être* ***numérotées*** *en indiquant le nombre de pages total (par exemple, 1/12, 2/12, ect.)*

⑤ *L'usage du blanco, souris, effaceurs et stylos frixion interdit : il faut* ***rayer proprement*** *(à la règle) en cas d'erreur.*

Exercice 1 – Questions/Exercices de cours. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\bar{z} = -z$. Que peut-on dire de z ? *On ne demande pas de démonstration.*
2. Donner la définition d'une fonction f bijective de I vers J.
3. Développer, à l'aide du binôme de Newton, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité $(2x-1)^4$.
4. Énoncer les formules d'Euler.
5. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ à l'aide du pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & -4 \\ 4x & + & y & + & 4z & = & -2 \end{array}\right.$$

6. Déterminer les valeurs suivantes de la fonction arccos.

   a) $\arccos(0)$ b) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ c) $\arccos(1)$

Exercice 2 – On cherche à résoudre l'équation $(E_1) : z^4 - (5-14i)z^2 - 2(12+5i) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. On considère l'équation $(E_1') : Z^2 - (5-14i)Z - 2(12+5i) = 0$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.
   (a) Justifier que le discriminant de cette équation de second degré vaut $\Delta = 25(-3-4i)$.
   (b) Calculer $(1-2i)^2$.
   (c) En déduire toutes les solutions de l'équation (E_1').
2. Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $-2i$.
3. Résoudre l'équation $\omega^2 = 5 - 12i$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$.
4. Résoudre l'équation $\omega^2 = -2i$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$.
5. En déduire toutes les solutions de (E_1).

On cherche maintenant à résoudre l'équation $(E_2) : z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

6. Factoriser, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^5 + 1$ par $z + 1$.
7. Montrer que, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z^5 + 1 = 0 \text{ et } z \neq -1$$

8. En déduire toutes les solutions de (E_2). *On les exprimera sous forme exponentielle en faisant apparaître l'argument principal, sauf pour les solutions réelles qu'on laissera telles quelles.*

Exercice 3 – L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}(x)$$

1. Rappeler l'expression des fonctions ch et sh.
2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.
3. Montrer que la fonction $k : x \longmapsto 2\mathrm{sh}(x) + 1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à déterminer. *On admet que* $\lim\limits_{x \to -\infty} k(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = +\infty$.

4. Justifier que l'équation $2\mathrm{sh}(x) + 1 = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$. *On ne demande pas de déterminer la valeur de α.*
5. En déduire le tableau de signes de la fonction $k : x \longmapsto 2\mathrm{sh}(x) + 1$.
6. Montrer que
$$f(\alpha) = \frac{3}{4}$$
7. Dresser le tableau de variations de f. *On admet que*
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
8. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
9. Tracer la courbe représentative de f. *On admet que $\alpha \approx -0.48$.*
10. La fonction f admet-elle un minimum ? un maximum ?

Exercice 4 – Pour $\alpha \in \mathbb{N}$ et pour $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers, on pose
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} k^{\alpha} 2^{a_k}$$
Dans toute la suite de cet exercice, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose dans cette question que pour tout $k \in \mathbb{N}, a_k = 0$. Calculer S_n lorsque $\alpha = 0, \alpha = 1$ et $\alpha = 2$.
2. On suppose dans cette question que $\alpha = 0$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}, a_k = k$. Calculer S_n.

On suppose dans toute la suite de cet exercice que
$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad a_k = k.$$
Ainsi, dans ce cas,
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k 2^k$$
On propose ni une ni deux mais trois méthodes pour calculer S_n.

3. Calculer S_1 et S_2.
4. (*Grâce à un changement d'indice*)
   (a) Justifier que
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)2^{k+1}$$
   (b) En déduire que
   $$S_n = 2S_n - n2^{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n-1} 2^k$$
   (c) En déduire la valeur de S_n.
   (d) Vérifier que la formule trouvée coïncide avec les réponses de la question 3.
5. (*Grâce à une fonction auxiliaire*) Soit
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \end{array}$$
   (a) En calculant de deux façons différentes la dérivée de f, montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k x^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$
   (b) Retrouver alors la valeur de S_n.
6. (*Grâce à une méthode dont on ne peut pas donner le nom sinon on dévoile tout...*)
   (a) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
   $$(k+1)2^{k+1} - k2^k = k2^k + 2^{k+1}$$
   (b) Retrouver alors la valeur de S_n.