

DS 2

Samedi 8 novembre, de 8h à 11h

Exercice 1 – Questions de cours. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\bar{z} = -z$. Que peut-on dire de z ? On ne demande pas de démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\bar{z} = -z$. Alors $z \in i\mathbb{R}$.

2. Donner la définition d'une fonction f bijective de I vers J .

On dit qu'une fonction f est bijective de I vers J si

$$\forall y \in J, \exists ! x \in I, y = f(x)$$

3. Développer, à l'aide du binôme de Newton, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(2x - 1)^4$.

Grâce au binôme de Newton, on obtient,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, (2x - 1)^4 &= (2x)^4 + 4(2x)^3 \times (-1) + 6(2x)^2 \times (-1)^2 + 4(2x) \times (-1)^3 + (-1)^4 \\ &= 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1 \end{aligned}$$

4. Énoncer les formules d'Euler.

Les formules d'Euler sont les suivantes :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

5. Résoudre le système suivant à l'aide du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On résout le système linéaire grâce à la **méthode du pivot de Gauss**.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ -3y - 2z = -2 & (L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1) \\ -3y - 4z = 2 & (L_3 \leftrightarrow L_3 - 4L_1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ -3y - 2z = -2 \\ -2z = 4 & (L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ -3y - 2z = -2 \\ z = -2 & (L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ y = 2 \\ z = -2 & (L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -2 & (L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2) \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système linéaire admet donc une unique solution, donnée par le triplet (1, 2, -2).

✚ **Vérification.** Le triplet (1, 2, -2) est bien une solution du système car

$$\begin{cases} 1 + 2 + 2 \times (-2) = -1 & \checkmark \\ 2 \times 1 - 2 + 2 \times (-2) = -4 & \checkmark \\ 4 \times 1 + 2 + 4 \times (-2) = -2 & \checkmark \end{cases}$$

6. Déterminer les valeurs suivantes de la fonction arccos.

a) On a $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ car $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$.

b) On a $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ car $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$.

c) On a $\arccos(1) = 0$ car $\cos(0) = 1$ et $0 \in [0, \pi]$.

Exercice 2 – On cherche à résoudre l'équation $(E_1) : z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(12 + 5i) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. On considère l'équation $(E'_1) : Z^2 - (5 - 14i)Z - 2(12 + 5i) = 0$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

(a) Justifier que le discriminant de cette équation de second degré vaut

$$\Delta = 25(-3 - 4i)$$

Il s'agit d'une équation de second degré de la forme $aZ^2 + bZ + c = 0$ où $a = 1$, $b = -5 + 14i$ et $c = -2(12 + 5i)$. Son discriminant est

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5 + 14i)^2 - 4(-2(12 + 5i)) = -75 - 100i = 25(-3 - 4i)$$

(b) Calculer $(1 - 2i)^2$.

On développe :

$$(1 - 2i)^2 = 1^2 + (2i)^2 - 2 \cdot 2i = -3 - 4i.$$

(c) En déduire toutes les solutions de l'équation (E'_1) .

Il s'agit d'une équation de second degré dont le discriminant est

$$\Delta = 25(-3 - 4i) = 5^2 \times (1 - 2i)^2 = (5 - 10i)^2 = \delta^2$$

en utilisant les deux questions précédentes. Comme $\Delta \neq 0$, l'équation (E'_1) admet deux solutions complexes, données par,

$$Z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} = -2i \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} = 5 - 12i$$

2. Donner la forme trigonométrique de $-2i$

On obtient directement que

$$-2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

3. Résoudre l'équation $\omega^2 = 5 - 12i$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$.

Posons $w = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \omega^2 = 5 - 12i &\iff \begin{cases} w^2 = 5 - 12i \\ |w|^2 = |5 - 12i| \end{cases} &\iff \begin{cases} (x + iy)^2 = 5 - 12i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13 \end{cases} \\ &&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = 5 - 12i \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \\ &&\iff \begin{cases} 2xy = -12 & \text{(égalité des parties imaginaires)} \\ x^2 - y^2 = 5 & (L_2) \quad \text{(égalité des parties réelles)} \\ x^2 + y^2 = 13 & (L_3) \end{cases} \\ &&\iff \begin{cases} xy = -6 & \text{(donc } x \text{ et } y \text{ de signes contraires)} \\ x^2 = 9 & (L_2 \leftarrow \frac{1}{2}(L_2 + L_3)) \\ y^2 = 4 & (L_3 \leftarrow \frac{1}{2}(L_3 - L_2)) \end{cases} \\ &&\iff \begin{cases} xy = -6 \\ x = \pm 3 \\ y = \pm 2 \end{cases} \\ &&\iff \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 2. \end{cases} \\ &&\iff w = 3 - 2i \quad \text{ou} \quad w = -3 + 2i. \end{aligned}$$

L'équation $\omega^2 = 5 - 12i$ admet deux solutions : $3 - 2i$ et $-3 + 2i$.

✚ **Vérification.** $(3 - 2i)^2 = 5 - 12i$ ✓

4. Résoudre l'équation $\omega^2 = -2i$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$.

Posons $\omega = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} z^2 = -2i &\iff r^2 e^{2i\theta} = 2 \times e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ &\iff \begin{cases} r^2 = 2 \\ 2\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = \sqrt{2} \text{ car } r > 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff z = \sqrt{2} e^{-i(\frac{\pi}{4} + k\pi)} \text{ avec } k \in \{0, 1\}. \\ &\iff z = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ &\iff z = 1 - i \text{ ou } z = -1 + i \end{aligned}$$

L'équation $\omega^2 = -2i$ admet deux solutions : $1 - i$ et $-1 + i$.

✚ **Vérification.** $(1 - i)^2 = -2i$ ✓

5. En déduire toutes les solutions de (E_1) .

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a,

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E_1) &\iff z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(12 + 5i) = 0 \\ &\iff Z^2 - (5 - 14i)Z - 2(12 + 5i) = 0 \quad \text{avec } Z = z^2 \\ &\iff Z = -2i \text{ ou } Z = 5 - 12i \quad \text{cf Question 1c} \\ &\iff z^2 = -2i \text{ ou } z^2 = 5 - 12i \\ &\iff z = 1 - i \text{ ou } z = -1 + i \text{ ou } z = 3 - 2i \text{ ou } z = -3 + 2i \quad \text{cf Questions 3 et 4} \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (E_1) admet $\boxed{\text{quatre solutions}}$ données par

$$\boxed{1 - i, \quad -1 + i, \quad 3 - 2i, \quad \text{et} \quad -3 + 2i}$$

On cherche maintenant à résoudre l'équation $(E_2) : z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

6. Factoriser, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^5 + 1$ par $z + 1$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a, en utilisant la formule du cours permettant de factoriser $a^n - b^n$ par $a - b$,

$$\begin{aligned} \boxed{z^5 + 1} &= z^5 - (-1)^5 \\ &= (z - (-1))(z^4 + z^3 \times (-1) + z^2 \times (-1)^2 + z \times (-1)^3 + (-1)^4) \\ &= (z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) \end{aligned}$$

7. Montrer que, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 \iff z^5 + 1 = 0 \text{ et } z \neq -1$$

- Sens direct. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$. Alors, d'après la question précédente,

$$z^5 + 1 = (z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = (z + 1) \times 0 = 0$$

De plus, $z \neq -1$, car -1 n'est pas une solution de l'équation $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

- Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^5 + 1 = 0$ et $z \neq -1$. Alors d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 &= \frac{z^5 + 1}{z + 1} && \text{licite car } z \neq -1 \\ &= \frac{0}{z + 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

8. En déduire toutes les solutions de (E_2) . On les exprimera sous forme exponentielle en faisant apparaître l'argument principal, sauf pour les solutions réelles qu'on laissera telles quelles.

On va utiliser les racines 5-ièmes de l'unité. Rappelons que

$$\mathbb{U}_5 = \left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{-\frac{4i\pi}{5}}, e^{-\frac{2i\pi}{5}} \right\}$$

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \boxed{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0} &\iff z^5 + 1 = 0 \text{ et } z \neq -1 \\ &\iff (-z)^5 = 1 \text{ et } z \neq -1 \\ &\iff -z \in \mathbb{U}_5 = \left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{-\frac{4i\pi}{5}}, e^{-\frac{2i\pi}{5}} \right\} \text{ et } z \neq -1 \\ &\iff z \in \left\{ -1, -e^{\frac{2i\pi}{5}}, -e^{\frac{4i\pi}{5}}, -e^{-\frac{4i\pi}{5}}, -e^{-\frac{2i\pi}{5}} \right\} \text{ et } z \neq -1 \\ &\iff z \in \left\{ e^{i\pi} e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{i\pi} e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{i\pi} e^{-\frac{4i\pi}{5}}, e^{i\pi} e^{-\frac{2i\pi}{5}} \right\} \\ &\iff z \in \left\{ e^{\frac{7i\pi}{5}}, e^{\frac{9i\pi}{5}}, e^{\frac{i\pi}{5}}, e^{\frac{3i\pi}{5}} \right\} \\ &\iff z \in \boxed{\left\{ e^{-\frac{3i\pi}{5}}, e^{-\frac{i\pi}{5}}, e^{\frac{i\pi}{5}}, e^{\frac{3i\pi}{5}} \right\}}. \end{aligned}$$

Exercice 3 – L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}(x)$$

1. Rappeler l'expression des fonctions ch et sh .

On a,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned} \boxed{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)} &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

3. Montrer que la fonction $k : x \mapsto 2\operatorname{sh}(x) + 1$ réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J à déterminer.

On admet que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$$

- L'ensemble \mathbb{R} est un **intervalle**.
- La fonction k est **continue** sur \mathbb{R} .
- De plus, k est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions qui le sont e

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad k'(x) = 2\operatorname{ch}(x) > 0$$

On en déduit que k est une fonction **strictement croissante** sur \mathbb{R} .

D'après le **théorème de la bijection**, k réalise donc une bijection de \mathbb{R} sur $k(\mathbb{R})$. Comme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$$

on en déduit que $k(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{la fonction } k \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

4. Justifier que l'équation $2\operatorname{sh}(x) + 1 = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$. *On ne demande pas de déterminer la valeur de α .*

D'après la question précédente, la fonction k réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists ! x \in \mathbb{R}, \quad y = k(x)$$

En particulier, comme $0 \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel α tel que $0 = k(\alpha)$, c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{l'équation } 2\operatorname{sh}(x) + 1 = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \in \mathbb{R}.$$

5. En déduire le tableau de signe de la fonction $k : x \mapsto 2\operatorname{sh}(x) + 1$.

La fonction k est strictement croissante sur \mathbb{R} (cf Question 3) et s'annule uniquement en α d'après la question précédente. On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$k(x)$	-	0	+

6. Montrer que

$$f(\alpha) = \frac{3}{4}$$

Par construction, on sait que

$$2\operatorname{sh}(\alpha) + 1 = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \operatorname{sh}(\alpha) = -\frac{1}{2}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \boxed{f(\alpha)} &= [\operatorname{ch}(\alpha)]^2 + \operatorname{sh}(\alpha) \\ &= 1 + [\operatorname{sh}(\alpha)]^2 + \operatorname{sh}(\alpha) \quad \text{d'après la relation fonda entre sh et ch (cf Question 2)} \\ &= 1 + \left[-\frac{1}{2}\right]^2 + \frac{1}{2} \quad \text{car par construction } \operatorname{sh}(\alpha) = -\frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

7. Dresser le tableau de variations de f . On admet que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} comme produit et somme de fonctions qui le sont

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(x) = \operatorname{ch}(x)(2\operatorname{sh}(x) + 1)$$

En utilisant le tableau de signe de la fonction k (cf Question 5) et comme la fonction c est strictement positive sur \mathbb{R} , on en déduit le tableau de signe suivant pour f' et donc le tableau de variations suivant pour f .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$\operatorname{ch}(x)$	+		+
$2\operatorname{sh}(x) + 1$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$

8. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

D'après la question précédente, la fonction f admet un minimum en α valant $\frac{3}{4} \geq 0$. Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq \frac{3}{4}$$

Et donc en particulier,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 0}$$

9. Tracer la courbe représentative de f . On admet que $\alpha \approx -0.48$.
10. La fonction f est-elle admet-elle un minimum ? un maximum ?

D'après le tableau de variations, la fonction f admet un .

Cependant, la fonction f n'admet par exemple car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 4 – Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n k^\alpha 2^{a_k}$$

avec $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 0$. Calculer S_n pour $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

Lorsque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 0$, la somme devient

$$S_n = \sum_{k=0}^n k^\alpha 2^0 = \sum_{k=0}^n k^\alpha$$

- Si $\alpha = 0$, on reconnaît la **somme d'une constante** et alors

$$S_n = \sum_{k=0}^n k^0 = \sum_{k=0}^n 1 = 1 \times (n - 0 + 1) = \boxed{n + 1}$$

- Si $\alpha = 1$, on reconnaît la **somme des premiers entiers** et alors

$$S_n = \sum_{k=0}^n k^1 = \sum_{k=0}^n k = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

- Si $\alpha = 2$, on reconnaît la **somme des carrés des premiers entiers** et alors

$$S_n = \sum_{k=0}^n k^2 = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

2. On suppose que $\alpha = 0$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$. Calculer S_n .

Lorsque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$ et $\alpha = 0$, la somme devient

$$S_n = \sum_{k=0}^n k^0 2^k = \sum_{k=0}^n 2^k$$

On reconnaît une somme géométrique de raison $2 \neq 1$, et on obtient alors

$$S_n = 2^0 \times \frac{1 - 2^{n-0+1}}{1 - 2} = \boxed{2^{n+1} - 1}$$

On suppose dans toute la suite de cet exercice que

$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = k.$$

Ainsi, dans ce cas,

$$S_n = \sum_{k=0}^n k 2^k$$

On propose ni une ni deux mais trois méthodes pour calculer S_n .

3. Calculer S_1 et S_2 .

On a,

$$\boxed{S_1} = \sum_{k=0}^1 k 2^k = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 = \boxed{2}$$

De même,

$$\boxed{S_2} = \sum_{k=0}^2 k 2^k = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 = \boxed{10}$$

4. (Grâce à un changement d'indice)

(a) Justifier que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)2^{k+1}$$

Par définition,

$$S_n = \sum_{k=0}^n k2^k = 0 \times 2^0 + \sum_{k=1}^n k2^k = \sum_{k=1}^n k2^k$$

En effectuant le changement d'indice $k = j + 1$, on obtient,

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)2^{j+1}$$

c'est-à-dire (en renommant la variable de sommation qui est une variable muette

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)2^{k+1}$$

(b) En déduire que

$$S_n = 2S_n - n2^{n+1} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$$

D'après la question précédente,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)2^{k+1}$$

Donc, en utilisant la linéarité de la somme, on obtient,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} k2^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k2^k \times 2^1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \times 2^1 \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} k2^k + 2 \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\ &= 2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} k2^k + n2^n - n2^n \right) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\ &= 2 \left(\sum_{k=0}^n k2^k - n2^n \right) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\ &= 2 \sum_{k=0}^n k2^k - n2 \times 2^n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\ &= 2S_n - n2^{n+1} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \end{aligned}$$

(c) En déduire la valeur de S_n .

D'après la question précédente,

$$S_n = 2S_n - n2^{n+1} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$$

On obtient donc que

$$S_n = n2^{n+1} - 2 \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$$

Or la somme restante est une somme géométrique de raison $2 \neq 1$, donc on obtient,

$$\begin{aligned} S_n &= n2^{n+1} - 2 \times 2^0 \times \frac{1 - 2^{n-1-0+1}}{1-2} \\ &= n2^{n+1} - 2(2^n - 1) \\ &= (n-1)2^{n+1} + 2 \end{aligned}$$

(d) Vérifier que la formule trouvée coïncide avec les réponses de la question 3.

On vient de démontrer à la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

Pour $n = 1$, on obtient

$$S_1 = (1-1)2^{1+1} + 2 = 2$$

et pour $n = 2$, on obtient,

$$S_2 = (2-1)2^{2+1} + 2 = 10$$

On retrouve bien les mêmes résultats qu'à la question 3.

5. (Grâce à une fonction auxiliaire) Soit

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k$$

(a) En calculant de deux façons la dérivée de f , montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=0}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

D'une part,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynomiale et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{k=0}^n kx^{k-1}.$$

D'autre part, on reconnaît une somme géométrique. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Cette expression est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f'(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, en identifiant les deux calculs de dérivée, on obtient,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=0}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

(b) Retrouver alors la valeur de S_n .

On sait que

$$S_n = \sum_{k=0}^n k2^k = 2 \sum_{k=0}^n k2^{k-1}$$

Or à la question précédente, on vient de montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=0}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Donc, en prenant $x = 2$, dans cette égalité, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k2^{k-1} &= \frac{n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1}{(1-2)^2} \\ &= n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1 \\ &= 2^n(2n - n - 1) + 1 \\ &= 2^n(n - 1) + 1 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$S_n = 2 \sum_{k=1}^n k2^{k-1} = 2[2^n(n-1) + 1] = 2^{n+1}(n-1) + 2$$

(Et on retrouve bien le résultat précédent.)

6. (Grâce à une méthode mystère pas si mystérieuse si on regarde bien les questions...)

(a) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(k+1)2^{k+1} - k2^k = k2^k + 2^{k+1}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a,

$$\begin{aligned} (k+1)2^{k+1} - k2^k &= (k+1)2^k \times 2 - k2^k \\ &= 2^k[(k+1) \times 2 - k] \\ &= 2^k[2k + 2 - k] \\ &= 2^k[k + 2] \\ &= k2^k + 2^{k+1} \end{aligned}$$

(b) Retrouver alors la valeur de S_n .

Par construction,

$$S_n = \sum_{k=0}^n k2^k$$

Or, on vient de montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k2^k = (k+1)2^{k+1} - k2^k - 2^{k+1}$$

Ainsi,

$$S_n = \sum_{k=0}^n [(k+1)2^{k+1} - k2^k - 2^{k+1}] = \sum_{k=0}^n [(k+1)2^{k+1} - k2^k] - \sum_{k=0}^n 2^{k+1}$$

Or, la première somme est télescopique, on obtient donc,

$$\sum_{k=0}^n [(k+1)2^{k+1} - k2^k] = (n+1)2^{n+1} - 0 \times 2^0 = (n+1)2^{n+1}$$

La deuxième somme est une somme géométrique de raison $2 \neq 1$ (à facteur 2 près) et donc,

$$\sum_{k=0}^n 2^{k+1} = 2 \sum_{k=0}^n 2^k = 2 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2(2^{n+1} - 1)$$

Finalement, en combinant ces deux calculs, on obtient,

$$\begin{aligned} \boxed{S_n} &= (n+1)2^{n+1} - 2(2^{n+1} - 1) \\ &= 2^{n+1}(n+1-2) + 2 \\ &= \boxed{2^{n+1}(n-1) + 2} \end{aligned}$$

(Et on retrouve bien le résultat habituel...)