DS 3

Samedi 29 novembre, de 8h à 11h

Les règles à respecter sont les suivantes.

① *Aucun document n'est autorisé.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***

② *Les candidat·e·s sont invité·e·s à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible leurs résultats.*

③ *Pour augmenter la* ***lisibilité*** *des calculs, dans la mesure du possible, les égalités successives seront présentées en colonne (et non pas en ligne) avec les différents symboles = bien alignés.*

④ *Les* ***pages*** *doivent être* ***numérotées*** *en indiquant le nombre de pages total (par exemple, 1/12, 2/12, ect.)*

⑤ *L'usage du blanco, souris, effaceurs et stylos frixion interdit : il faut* ***rayer proprement*** *(à la règle) en cas d'erreur.*

⑥ *Écrire au début de sa copie «J'ai bien relu les consignes».*

Exercice 1 – Questions de cours. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ à l'aide du pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 5y & + & 2z & = & 8 \\ 2x & - & 4y & + & z & = & 5 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 5 \end{array}\right.$$

On demande de faire apparaître sur la copie la ***vérification*** *des résultats.*

2. Déterminer les valeurs suivantes en **justifiant** précisément les résultats.

a) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ b) $\arcsin(0)$ c) $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

3. Recopier et compléter le texte suivant donnant la définition de la notion de primitive.

« Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est ___ primitive de f sur I si
① la fonction F est ___________
② et ________________ »

4. Dans cette question, on cherche à déterminer une primitive de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x-2}$$

(a) Trouver les racines éventuelles du polynôme $x \mapsto x^2+x-2$ et en déduire sa forme factorisée.

(b) Déterminer deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-2\}, \qquad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

(c) En déduire une primitive de f sur $]-2,1[$. *Le résultat final ne doit plus faire intervenir de valeur absolue.*

(d) En déduire l'ensemble des primitives de f sur $]-2,1[$.

(e) En déduire la primitive de f sur $]-2,1[$ qui s'annule en 0.

5. Donner la définition d'une matrice inversible.

Exercice 2 – Sujet de concours : EDHEC 2020 (filière ECE). On convient que, pour tout réel x, on a $x^0 = 1$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence des deux intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$$

2. (a) Calculer I_0.

(b) Calculer I_1 à l'aide du changement de variables «t=1+x».

3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0,1], \qquad \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2} + \frac{2x^{n+1}}{(1+x)^2} + \frac{x^n}{(1+x)^2} = x^n$$

   (b) En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$$

   (c) En déduire la valeur I_2.

4. (a) Montrer que,

$$\forall x \in [0,1], \qquad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{(1+x)^2} \leq 1$$

   (b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n = n \times J_{n-1} - \frac{1}{2}$$

6. (a) Calculer J_0.
   (b) Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad J_n + J_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

   (c) En déduire la valeur de J_1.

7. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$

Exercice 3 – Sujet de concours : ECRICOME 2024 (filière ECE). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la matrice carrée de taille $n \times n$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0, et dont tous les autres coefficients sont égaux à 1 :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note I_n la matrice identité d'ordre n.

Partie 1 - Étude du cas $n = 3$

Dans cette question, on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer par le calcul que $(M + I_3)^2 = 3(M + I_3)$.
2. Développer les expressions littérales $(M + I_3)^2$ et $3(M + I_3)$.
3. En déduire que

$$M^2 - M - 2I_3 = 0_{3,3}.$$

4. En déduire que la matrice M est inversible et déterminer son inverse.

Dans les questions qui suivent, on considère les matrices P et Q données par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Montrer que la matrice P est inversible et que $P^{-1} = Q$.
6. On pose $D = P^{-1}MP$. Calculer la matrice D et en déduire que D est une matrice diagonale.
7. Justifier précisément que $M = PDP^{-1}$.
8. Montrer par récurrence que,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad M^k = PD^kP^{-1}$$
9. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de D^k.
10. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de M^k.
11. On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_k et b_k tels que
$$M^k = a_kM + b_kI_3.$$
Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de a_k et b_k.

Partie 2 - Cas général : n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2

Soit $n \geq 2$ fixé dans toute cette partie. On considère la matrice J_n de taille $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Calculer J_n^2 et exprimer le résultat obtenu en fonction de J_n.
13. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel k non nul, $(J_n)^k = n^{k-1}J_n$.
14. Exprimer M_n en fonction de I_n et J_n.
15. En déduire que, pour tout entier naturel k non nul,
$$(M_n)^k = c_kJ_n + (-1)^kI_n$$
où
$$c_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1}(-1)^{k-i}$$
16. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul,
$$c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}$$
où c_k est le réel défini à la question précédente.
17. En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression des coefficients diagonaux et des coefficients non diagonaux de $(M_n)^k$ en fonction de n et de k.