DM 4

À rendre pour le mardi 16 décembre (facultatif)

Petit rappel : vous pouvez aussi rendre votre DS2 corrigé (entièrement ou partiellement) jusqu'au 9 décembre, et ainsi récupérer un point supplémentaire sur la note du devoir.

Exercice 1 – Dans cet exercice, on étudie les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 5y = f(x)\mathrm{e}^{-x} \quad (E)$$

pour différentes expressions de la fonction réelle f.

1. Déterminer les solutions réelles de l'équation homogène associée à (E).
2. On suppose dans cette question que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$. Déterminer <u>une</u> solution particulière φ_1 de l'équation
$$y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^{-x} \quad (E_1).$$
3. On suppose dans cette question que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$. On pose,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_2(x) = \frac{1}{16}(2x+5)\mathrm{e}^{-x}$$
Montrer que φ_2 est <u>une</u> solution particulière de l'équation
$$y'' - 2y' + 5y = (x+2)\mathrm{e}^{-x} \quad (E_2).$$
4. On suppose dans cette question que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$.
   (a) Déterminer <u>une</u> solution particulière complexe $\varphi_{\mathbb{C}}$ de l'équation
   $$y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^{x(-1+i)} \quad (E_{\mathbb{C}}).$$
   (b) Déduire des questions précédentes <u>une</u> solution particulière réelle φ_3 de l'équation
   $$y'' - 2y' + 5y = \sin(x)\mathrm{e}^{-x} \quad (E_3).$$
5. On suppose dans cette question que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 16x + 29 + 4\sin(x)$. Des questions précédentes, déduire en fonction de φ_1, φ_2 et φ_3, <u>toutes</u> les solutions de l'équation différentielle
$$y'' - 2y' + 5y = (16x + 29 + 4\sin(x))\mathrm{e}^{-x} \quad (E_4).$$
Pour trouver <u>une</u> solution particulière, on ne se lancera pas dans de longs calculs mais on essayera d'appliquer un principe du cours...