TD 02 – Trigonométrie

Exercice 1 – Repérage d'angles. Placer les angles concernés sur le cercle trigonométrique et en déduire les valeurs suivantes.

a) $\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)$

b) $\cos\left(\frac{17\pi}{6}\right)$

c) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

d) $\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$

Exercice 2 – Utilisation de la relation fondamentale. Soit $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ tel que $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$. En déduire $\sin(\theta)$.

Exercice 3 – Utilisation des formules d'addition. Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide des *formules d'addition*, simplifier les quantités suivantes.

a) $\cos(x + 17\pi)$

b) $\sin(-x + 8\pi)$

c) $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

d) $\sin(x+\pi) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

e) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 4 – Utilisation des formules de trigonométrie.

a) En remarquant que $2 \times \frac{5\pi}{8} = \frac{5\pi}{4}$, calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$.

b) En remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$, calculer $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 5 – Utilisation des formules de symétrie. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

a) $A = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{10\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{13\pi}{7}\right)$

b) $B = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

Exercice 6 – Utilisation des formules de factorisation. Soient p et q deux réels tels que $\sin(p) + \sin(q) \neq 0$. Simplifier l'expression

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$$

En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

Exercice 7 – Formules de l'angle moitié. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que toutes les quantités de l'exercice soient bien définies. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

1. (a) Exprimer $\cos(x)$ en fonction de $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$.
   (b) Exprimer $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ en fonction de $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$.
   (c) En déduire que
$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
2. De même, montrer que
$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$
3. En déduire que
$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Exercice 8 – Utilisation des formules. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que toutes les quantités suivantes soient bien définies.

1. Exprimer $(\cos(x) + \sin(x))^2$ en fonction de $\sin(2x)$.
2. Exprimer $\cos^4(x) - \sin^4(x)$ en fonction de $\cos(2x)$.
3. Exprimer
$$\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} + \frac{\cos(3x)}{\cos(x)}$$
en fonction de $\cos(2x)$.
4. Montrer que
$$1 + \frac{1}{\cos(2x)} = \frac{\tan(2x)}{\tan(x)}$$

Exercice 9 – Inégalité sur le cosinus. Démontrer que

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \ \cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$$

On pourra tracer le tableau de variations de la fonction $x \mapsto \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 10 – Équations trigonométriques. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $\sin(x) = \frac{1}{2}$

b) $\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

d) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

e) $\sin(2x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

f) $\sin(3x) = \cos(x+\pi)$ *On pourra commencer par montrer que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\sin(3x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ *(un sinus est un cosinus qui s'ignore...)*

Exercice 11 – Inéquations trigonométriques. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $\cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $2\sin(x) + 1 \leqslant 0$

c) $2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} < 0$

d) $-\frac{1}{2} < \sin(2x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 12 – (In)Équations trigonométriques plus complexes. Résoudre les équations et les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. *On pourra faire apparaître des équations de second degré.*

a) $2\cos^2(x) + 5\cos(x) - 3 = 0$

b) $\cos^2(x) - \cos(x) - 12 = 0$

c) $2\cos^2(2x) - 3\cos(2x) + 1 < 0$

Exercice 13 – Un peu de physique. On considère un circuit électrique où l'intensité i en fonction du temps t est donnée par,

$$\forall t \geqslant 0,\ \ i(t) = I\cos(\omega t)$$

avec I et ω deux réels, et la tension est un signal sinusoïdal de la forme

$$\forall t \geqslant 0,\ \ e(t) = RI(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))$$

avec R un réel. Montrer que la tension est déphasée de $-\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'intensité.

Exercice 14 – Préambule Maths C 2022.

1. Rappeler le domaine de définition de la fonction tangente, puis donner, sans démonstration, sa parité et sa dérivée, ainsi que, pour sa restriction à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ses variations (on demande le tableau de variations, où apparaîtront les limites aux bornes).
2. Tracer la courbe représentative de la fonction tangente sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
3. Exprimer, pour tout réel t de $]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$, la quantité $1 + \frac{1}{\tan^2(t)}$ en fonction uniquement de $\sin^2(t)$.

Exercice 15 – Préambule Maths C 2019.

1. Pour tout réel t de $[0, \frac{\pi}{2}]$, exprimer $\cos t$ en fonction de $\cos\frac{t}{2}$.
2. Pour tout réel t de $[0, \frac{\pi}{2}]$, comparer $\frac{1}{1+\tan^2\frac{t}{2}}$ et $\cos^2\frac{t}{2}$.
3. Pour tout réel t de $[0, \frac{\pi}{2}]$, on pose

$$u = \tan\frac{t}{2}$$

On demande d'exprimer $\cos t$ en fonction de u.

Exercice 16 – Étude de fonctions. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin(2x) - \frac{3}{4}\tan(x)$$

1. Étudier la parité.
2. Vérifier que f est π-périodique.
3. Montrer que f admet un maximum sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et préciser la valeur de ce maximum.
4. Représenter f sur un intervalle de longueur trois périodes.

Exercice 17 – Étude de fonctions. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \cos(x) - \cos^2(x)$$

1. Donner l'ensemble de définition D_1 de f.
2. Déterminer le domaine d'étude D_2 sur lequel il suffit d'étudier la fonction f.
3. Dresser un tableau de variations de la fonction f sur D_2.
4. En déduire la représentation graphique de la fonction f sur D_1.

Exercice 18 – Étude de fonctions. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \cos(3x)\cos^3(x)$$

1. Déterminer la parité de f.
2. Montrer que f est π-périodique.
3. Sur quel intervalle I peut-on se contenter d'étudier f?
4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité $f'(x)$ est du signe de $-\sin(4x)$. En déduire le sens de variation de f sur I.
5. Tracer la représentation graphique de f.

Exercice 19 – Étude de fonctions. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos(x) + \sin(x))$$

1. (a) Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
   (b) En déduire que,
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-x}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
2. (a) Démontrer que,
   $$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = -2\mathrm{e}^{-x}\sin(x)$$
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.
3. On note I l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$.
   (a) Étudier, pour tout $x \in I$, le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur I.
   (b) Tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle I.

Exercice 20 – Soit $x \in]0, \pi[$. On pose,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ P_n(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Montrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ P_n(x) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

Exercice 21 – À quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$ l'équation $1 + \sin^2(\lambda x) = \cos(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une unique solution ?

Exercice 22 – On admet que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(5x) = 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x).$$

En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.