15. Lien Systèmes Linéaires/Calcul Matriciel

1 Systèmes Linéaires

1.1 Systèmes Linéaires Compatibles

Dans un chapitre précédent, nous avons appris à résoudre des systèmes linéaires de petite taille (2 ou 3 inconnues à 2 ou 3 équations) à l'aide de la méthode du pivot. Nous étudions ici des systèmes avec davantage d'inconnues ou d'équations

Définition 1.1 — Système Linéaire. On appelle *système linéaire* de n équations à p inconnues un système (S) de la forme

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & +a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & +a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

où

- et les réels $x_1, \dots, x_p$ sont les p *inconnues* du système,
- les réels $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,n}$ sont les *coefficients* du système,
- et le vecteur de réels $(b_1, \dots, b_n)$ forme le *second membre* du système.

Une *solution* du système est un p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ qui vérifie le système (S) ci-dessus.

Définition 1.2 Un système linéaire est dit **compatible** s'il admet au moins une solution.

Exemple 1.3 Déterminer si le système suivant est compatible ou non.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 7 \\ 2x - 5y + z = -4 \\ 3x - 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

Exemple 1.4 Déterminer si le système suivant est compatible ou non.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

L'Exemple 1.4 est représentatif d'un phénomène plus général.

Définition 1.5 Soit (S) le système linéaire de n équations à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & +a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & +a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

On appelle **système homogène associé** le système linéaire suivant

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & +a_{1,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & +a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array} \right.$$

Tout système homogène est compatible : le p-uplet $(0, \dots, 0)$ en est une solution.

Attention, un sytème linéaire et son système homogène associé peuvent avoir des comportements très différents.

Exemple 1.6 Dire si le système suivant est compatible. Faire de même avec le système homogène associé.

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ -x & - & y & = & -1 \end{array}\right.$$

1.2 Interprétation matricielle d'une système linéaire

On a

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right. \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}}_{=A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{=X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{=B}$$

où

- $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice des coefficients du système
- $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la matrice colonne du second membre
- et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la matrice colonne est inconnues du système.

Exemple 1.7 Donner l'interprétation matricielle des systèmes linéaires suivants.

- $\begin{cases} 3x + 7y + z = 2 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \iff$

- $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2z = 3 \\ 2x + 3y + 4z = 6 \\ x - 3y = 15 \end{cases} \iff$

- $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_4 = 15 \end{cases} \iff$

On peut alors traduire la notion de compatibilité définie précédemment au niveau matriciel.

Proposition 1.8 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système linéaire $AX = B$ est **compatible** si et seulement si B est combinaison linéaire des colonnes de A.

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On peut écrire le vecteur inconnu sous la forme :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \cdots x_n E_n$$

Dans ce cas, le produit matriciel AX peut être ré-écrit sous la forme,

$$\begin{aligned} AX &= A(x_1 E_1 + \cdots + x_p E_p) \\ &= x_1 AE_1 + \cdots + x_p AE_p \\ &= x_1 C_1 + \ldots + x_p C_p \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient la caractérisation suivante.

$$\begin{aligned} \text{Le système } AX = B \text{ est compatible} &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \ AX = B \\ &\iff \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K},\quad x_1 C_1 + \ldots + x_p C_p = B \\ &\iff B \text{ est combinaison linéaire des colonnes de } A \end{aligned}$$

■

Exemple 1.9 Montrer que le système suivant est compatible :

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 5 \\ & & 2y & = & 4 \end{array} \right.$$

Proposition 1.10 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ On considère le système matriciel $AX = B$ que l'on suppose compatible. Soit X_0 une solution particulière de $AX = B$. Alors les solutions du système $AX = B$ sont de la forme $X = X_0 + Y$ où Y est solution du système homogène $AX = 0_{n,1}$.

Démonstration. Soit X_0 une solution particulière du système $AX = B$, autrement dit : $AX_0 = B$. Alors,

$$\begin{aligned} X \text{ est solution de } AX = B &\iff AX = B \\ &\iff AX = AX_0 \text{ car } AX_0 = B \text{ (solution particulière)} \\ &\iff A(X - X_0) = 0 \\ &\iff Y = X - X_0 \text{ est solution de } AX = 0 \\ &\iff X = X_0 + Y \text{ avec } Y \text{ solution de l'équation homogène} \end{aligned}$$

■

On retrouve un principe général de résolution, déjà croisé dans l'étude des Équations Différentielles, qui est le suivant.

solution générale du système	=	**solution générale du système *homogène* associée**	+	**solution *particulière* du système**

Exemple 1.11 Résoudre le système linéaire suivant grâce au principe de résolution énoncé plus haut.

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & -3 \\ -2x & + & 4y & = & 6 \end{array} \right.$$

1.3 Opérations élémentaires et matrices

On rappelle les **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système linéaire (et donc sur les lignes de la matrice associée). Ces opérations transforment un système linéaire en un système équivalent. Cela signifie que l'ensemble des solutions reste identique. Ces opérations élémentaires s'interprètent par des produits matriciels sur le système matriciel associé.

Opération élémentaire	Calcul matriciel associé	Effet sur la matrice I_n
Échange de deux lignes $L_i \longleftrightarrow L_j$ $(i \neq j)$	Revient à multiplier A à gauche par $T_{i,j}$:	
Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \neq 0)$	Revient à multiplier A à gauche par $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$:	
Ajout d'un multiple de ligne $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$ $(i \neq j)$	Revient à multiplier A à gauche par $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$:	

Les matrices $T_{i,j}$, $D_i(\lambda)$ et $T_{i,j}(\lambda)$ sont inversibles. La multiplication à droite par les matrices d'opérations élémentaires effectue les opérations analogues sur les colonnes de A.

Exemple 1.12 Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss au système linéaire suivant et suivre la trace de ce qu'il se passe matriciellement.

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} & & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

2 Calcul effectif de l'inverse d'une matrice

2.1 Systèmes de Cramer

Proposition 2.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$A \text{ est } \underline{\text{inversible}} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \text{ l'équation } AX = B \text{ admet une } \underline{\text{unique}} \text{ solution}$$

Dans ce cas, la solution du système est

$$X = A^{-1}B$$

et le système est appelé un **système de Cramer**.

Cette proposition permet de

1. Calculer l'unique solution du système associé à $AX = B$, lorsque que l'on sait que A est inversible et que l'on connaît son inverse ;
2. Montrer que A est inverse et calculer son inverse, en montrant que le système associé à $AX = B$ admet une unique solution
3. Montrer que A n'est pas inversible en montrant qu'il existe un second membre B (souvent le vecteur nul) tel que le système associé à $AX = B$ n'admet pas qu'une unique solution.

Exemple 2.2 — Utilisation 1. On considère le système linéaire suivant

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & 10y & + & 2z & = & -3 \end{array} \right.$$

1. Donner l'écriture matricielle de ce système.
2. Donner l'ensemble des solutions de ce système en admettant que A est inversible et que son inverse est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & -26 & -4 \\ -1 & -5 & -1 \\ 4 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.3 — Utilisation 2. On considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Proposition 2.4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes

- Si A possède une ligne ou une colonne nulle alors A n'est pas inversible.
- S'il existe $a_1, \dots, a_n$ non tous nuls tels que

$$a_1 C_1 + \cdots + a_n C_n = 0_{n,1}$$

  alors A n'est pas inversible.

Exemple 2.5 — Utilisation 3. On considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A n'est pas inversible.

Exemple 2.6 Déterminer si la matrice suivante est inversible.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2 Par opérations élémentaires sur la matrice

Pour trouver l'inverse d'une matrice inversible, plutôt que de raisonner sur le système linéaire associé, on peut directement raisonner sur la matrice, ce qui est souvent plus simple.

Proposition 2.7 Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.

Proposition 2.8 Une matrice est inversible si et seulement si l'on peut la transformer par des opérations élémentaires en une matrice triangulaire supérieure avec tous les coefficients diagonaux non nuls.

Exemple 2.9 Déterminer l'inversibilité des deux matrices suivantes.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir l'inverse d'une matrice inversible, il ne faut pas s'arrêter à une forme triangulaire supérieure, il faut aller plus loin et faire apparaître la matrice identité.

Proposition 2.10 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si l'on peut transformer A par des opérations élémentaires que sur les lignes (ou que sur le colonnes) en la matrice I_n alors A est inversible et la même suite d'opérations élémentaires (dans le même ordre) sur les lignes de I_n donne A^{-1}.

Idée de preuve.

Exemple 2.11 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$. Étudier son inversibilité.