TD 15 – Lien Systèmes Linéaires/Calcul Matriciel

1 Rappel : Résolution de Systèmes Linéaires grâce au pivot de Gauss

Exercice 1 – Interprétation matricielle. Donner l'interprétation matricielle des systèmes linéaires suivants. *On ne demande pas de résoudre les systèmes linéaires.*

a) $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -x+y+z-t=1 \\ x-y+z-t=1 \\ x+y+z-t=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z-4t=-1 \\ 2x-3y-8z+7t=8 \\ x+3y+5z-10t=-5 \\ 4x-y-6z-t=6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2z-2t+8u=0 \\ x+2y+z+5u=0 \\ -2x-4y-z-8u=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 2y+3z=3 \\ x-5y+7z=4 \end{cases}$

Exercice 2 – Pivot de Gauss. Dire si les systèmes suivants sont compatibles ou non, et donner le cas échéant les solutions. *On pourra utiliser la méthode du pivot de Gauss.*

a) $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -x+y+z-t=1 \\ x-y+z-t=1 \\ x+y+z-t=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z-4t=-1 \\ 2x-3y-8z+7t=8 \\ x+3y+5z-10t=-5 \\ 4x-y-6z-t=6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2z-2t+8u=0 \\ x+2y+z+5u=0 \\ -2x-4y-z-8u=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 2y+3z=3 \\ x-5y+7z=4 \end{cases}$

Exercice 3 – Compatiblité. Déterminer si les systèmes linéaires suivants sont compatibles **sans résoudre le système**. *On pourra utiliser la proposition 1.8 du polycopié.*

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 4 – Systèmes avec des paramètres. Résoudre les systèmes suivants où a, b, c, d et m sont des paramètres réels.

a) $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 2x-y+4z=b \\ 4x+3y-2z=c \\ 3x+y+z=d \end{cases}$

Exercice 5 – Conditions d'existence. À quelle(s) condition(s) sur les paramètres a, b, c et m les systèmes suivants admettent-ils au moins une solution? Donner alors les solutions.

a) $\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 3x-y+2z=b \\ x-5y+8z=c \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-2y+2z=m \\ x+y-z=1 \end{cases}$

2 Inverse d'une matrice

Exercice 6 – Résolution rapide grâce à l'inverse. Soient

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$B_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ B_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice A est inversible et donner son inverse
2. En déduire la résolution des systèmes linéaires

$$AX=B_1,\ AX=B_2 \quad \text{et} \quad AX=B_3$$

d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (sans utiliser le pivot de Gauss).

Exercice 7 – Résolution rapide grâce à l'inverse. Soit

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice A est inversible et donner son inverse.
2. En déduire (sans faire le pivot de Gauss !) que le système suivant $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ admet une unique solution que l'on donnera,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ x + 2z = -1 \end{cases}$$

Exercice 8 – Calcul d'inverse. Déterminer l'inverse, s'il existe, des matrices suivantes.

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

e) $E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 9 – Matrices non inversibles. Montrer que les matrices suivantes ne sont pas inversibles.

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 10 – QCM Lien Systèmes/Matrices. Sélectionner la ou les bonne(s) réponse(s).

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système linéaire $AX = B$ peut...
   a) admettre aucune solution
   b) peut admettre une unique solution
   c) peut admettre exactement deux solutions
   d) peut admettre une infinité de solutions
2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ (matrice inversible) et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système linéaire $AX = B$ est...
   a) compatible
   b) admet au moins une solution
   c) admet une unique solution
   d) admet une infinité de solutions
3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système linéaire $AX = B$ admet au moins une solution lorsque...
   a) le système est compatible
   b) lorsque A est inversible
   c) lorsque B est une combinaison linéaire des colonnes de A
   d) lorsque $B = 0_{n,1}$

3 Pour aller plus loin

Exercice 11 – Inverse via un polynôme annulateur. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A - I_3)(A + 3I_3)$.
2. En déduire une relation entre A^2, A et I_3.
3. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 12 – Diagonalisation. On considère les deux matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -6 & 4 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de D^n.
4. Montrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n.

Exercice 13 – Étude d'une suite récurrente d'ordre 3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2, u_1 = 1, u_2 = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

On définit les matrices A et P suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D.
3. En déduire D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$
5. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   (a) Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de X_n en fonction de A^n et X_0.
   (c) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 14 – Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la matrice

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Par la méthode de votre choix, discuter de l'inversibilité de la matrice $M(a)$ en fonction de la valeur du paramètre a. Le cas échéant, donner la valeur de son inverse.

Exercice 15 – Oral PSI Mines-Télécom 2019. Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 16 – Oral PSI Mines-Télécom 2019. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ telle que

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \qquad a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 17 – Écrit PT Mathématiques A 2013. Soient m, n, p, q, r, s des entiers naturels non nuls. $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes, à coefficients complexes et $\mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à r lignes et s colonnes, à coefficients complexes. $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients complexes. Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ de terme général a_{ij} et $B \in \mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ de terme général b_{ij}.

1. A quelle condition sur p, q, r, s le produit AB est-il bien défini ? Quelle est alors la taille de la matrice AB ?
2. Sous cette condition, on note c_{ij} le terme général de la matrice AB. Exprimer c_{ij} en fonction des a_{ij} et b_{ij}.