TD 15 – Lien Systèmes Linéaires/Calcul Matriciel (Correction)

1 Rappel : Résolution de Systèmes Linéaires grâce au pivot de Gauss

Exercice 1 – Interprétation matricielle. Donner l'interprétation matricielle des systèmes linéaires suivants. *On ne demande pas de résoudre les systèmes linéaires.*

a) $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -x+y+z-t=1 \\ x-y+z-t=1 \\ x+y+z-t=3 \end{cases}$

Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. On a,

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -x+y+z-t=1 \\ x-y+z-t=1 \\ x+y+z-t=3 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

b) $\begin{cases} x+y+z-4t=-1 \\ 2x-3y-8z+7t=8 \\ x+3y+5z-10t=-5 \\ 4x-y-6z-t=6 \end{cases}$

Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. On a,

$$\begin{cases} x+y+z-4t=-1 \\ 2x-3y-8z+7t=8 \\ x+3y+5z-10t=-5 \\ 4x-y-6z-t=6 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & -8 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & -10 \\ 4 & -1 & -6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}}$$

c) $\begin{cases} 2z-2t+8u=0 \\ x+2y+z+5u=0 \\ -2x-4y-z-8u=0 \end{cases}$

Soit $(x,y,z,t,u)\in\mathbb{R}^5$. On a,

$$\begin{cases} 2z-2t+8u=0 \\ x+2y+z+5u=0 \\ -2x-4y-z-8u=0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & -4 & -z & 0 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

d) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 2y+3z=3 \\ x-5y+7z=4 \end{cases}$

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a,

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 2y+3z=3 \\ x-5y+7z=4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

Exercice 2 – Pivot de Gauss. Dire si les systèmes suivants sont compatibles ou non, et donner le cas échéant les solutions. *On pourra utiliser la méthode du pivot de Gauss.*

a) $$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -x+y+z-t=1 \\ x-y+z-t=1 \\ x+y+z-t=3 \end{cases}$$

Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. On peut montrer grâce à la méthode du pivot de Gauss (calculs non détaillés ici que) :

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -x+y+z-t=1 \\ x-y+z-t=1 \\ x+y+z-t=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ & & y & + & z & & & = & 1 \\ & & & & z & - & t & = & 1 \\ & & & & & & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1 \\ y & = & 1 \\ z & = & 0 \\ t & = & -1 \end{array}\right.$$

Ainsi, le système linéaire admet une $\boxed{\text{unique solution,}}$ donnée par $\boxed{(1,1,0,-1).}$ En particulier, le système est $\boxed{\text{compatible.}}$

b) $$\begin{cases} x+y+z-4t=-1 \\ 2x-3y-8z+7t=8 \\ x+3y+5z-10t=-5 \\ 4x-y-6z-t=6 \end{cases}$$

Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. On peut montrer grâce à la méthode du pivot de Gauss (calculs non détaillés ici que) :

$$\begin{cases} x+y+z-4t=-1 \\ 2x-3y-8z+7t=8 \\ x+3y+5z-10t=-5 \\ 4x-y-6z-t=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & 4t & = & -1 \\ & & y & + & 2z & - & 3t & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & z+t+1 \\ y & = & -2z+3t-2 \end{array}\right.$$

Ainsi, le système linéaire admet une $\boxed{\text{infinité de solutions,}}$ de la forme

$$(z+t+1,-2z+3t-2,z,t) \qquad \text{pour tout } z,t\in\mathbb{R}$$

En particulier, le système est $\boxed{\text{compatible.}}$

c) $\begin{cases} 2z-2t+8u=0 \\ x+2y+z+5u=0 \\ -2x-4y-z-8u=0 \end{cases}$

On peut montrer que le système linéaire admet une $\boxed{\text{infinité de solutions,}}$ de la forme

$$(-2y-\frac{3t}{2}, y, -t, t, \frac{t}{2}) \qquad \text{pour tout } y,t \in \mathbb{R}$$

En particulier, le système est $\boxed{\text{compatible.}}$

d) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 2y+3z=3 \\ x-5y+7z=4 \end{cases}$

On peut montrer par la méthode du pivot de Gauss que ce système linéaire n'admet $\boxed{\text{pas de solution}}$: le système n'est $\boxed{\text{pas compatible.}}$

Exercice 3 – Compatiblité. Déterminer si les systèmes linéaires suivants sont compatibles **sans résoudre le système**. *On pourra utiliser la proposition 1.8 du polycopié. Attention, on ne demande pas de résoudre le système.*

a) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=B}$

On peut remarquer que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le second membre B est une combinaison linéaire des colonnes de A donc le système linéaire $AX = B$ est $\boxed{\text{compatible.}}$ Il admet au moins une solution donnée par le vecteur

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=B}$

On peut remarquer que

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le second membre B est une combinaison linéaire des colonnes de A donc le système linéaire $AX = B$ est $\boxed{\text{compatible.}}$ Il admet au moins une solution donnée par le vecteur

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=B}$

On peut remarquer que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le second membre B est une combinaison linéaire des colonnes de A donc le système linéaire $AX = B$ est $\boxed{\text{compatible.}}$ Il admet au moins une solution donnée par le vecteur

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 – Systèmes avec des paramètres. Résoudre les systèmes suivants où a, b, c, d et m sont des paramètres réels.

a) $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. En appliquant la méthode du pivot de Gauss, on obtient,

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & az & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccccl} x & + & y & + & az & = & 1 & L_3 \leftrightarrow L_1 \\ ax & + & y & + & z & = & 1 & \\ x & + & ay & + & z & = & 1 & \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccccl} x & + & y & + & az & = & 1 & \\ & & (1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 1-a & L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ & & (a-1)y & + & (1-a)z & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccccl} x & + & y & + & az & = & 1 & \\ & & (1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 1-a & \\ & & & & (2-a-a^2)z & = & 1-a & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 \\ & & (1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 1-a \\ & & & & -(a-1)(a+2)z & = & 1-a \end{array} \right.$$

- $\boxed{\text{Si } a \neq 1 \text{ et } a \neq -2}$ alors, $(a-1)(a+2) \neq 0$ et donc en résolvant le système de bas en haut, on obtient,

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccl} x & = & \frac{1}{a+2} \\ y & = & \frac{1}{a+2} \\ z & = & -\frac{1-a}{(a-1)(a+2)} = \frac{1}{a+2} \end{array} \right.$$

Le système admet donc une $\boxed{\text{unique solution}}$ donnée par

$$\boxed{\left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)}$$

- $\boxed{\text{Si } a = 2}$ alors le système devient

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 \\ & & (1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 1-a \\ & & & & 0 & = & -1 \end{array} \right.$$

La dernière ligne est incompatible. Le système n'admet $\boxed{\text{aucune solution.}}$

- $\boxed{\text{Si } a = 1}$ alors le système devient

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Le système admet alors une $\boxed{\text{infinité de solutions}}$ de la forme,

$$\boxed{(-y-z+1, y, z) \qquad \text{pour tout } y, z \in \mathbb{R}}$$

b) $\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 2x-y+4z=b \\ 4x+3y-2z=c \\ 3x+y+z=d \end{cases}$

- $\boxed{\text{Si } b=2d-c \text{ et } a=c-d}$ alors, le système admet une $\boxed{\text{infinité de solutions}}$ de la forme

$$\boxed{\left(x, \frac{1}{5}(x+2d-10x), \frac{1}{5}(-c+3d-5x)\right) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

- $\boxed{\text{Sinon}}$ le système n'admet $\boxed{\text{pas de solution.}}$

Exercice 5 – Conditions d'existence. À quelle(s) condition(s) sur les paramètres a, b, c et m les systèmes suivants admettent-ils au moins une solution? Donner alors les solutions.

a) $\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 3x-y+2z=b \\ x-5y+8z=c \end{cases}$

Le système est compatible si et seulement si $\boxed{2a-b+c=0.}$

b) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-2y+2z=m \\ x+y-z=1 \end{cases}$

Le système est compatible si et seulement si $\boxed{m=-2.}$

2 Inverse d'une matrice

Exercice 6 – Résolution rapide grâce à l'inverse. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ B_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice A est inversible et donner son inverse

   La matrice A est de taille 2×2. On peut commencer par calculer son déterminant qui vaut

   $$\det(A) = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$$

   Comme $\det(A) \neq 0$, la matrice A est inversible et son inverse est donnée par

   $$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

2. En déduire la résolution des systèmes linéaires

   $$AX = B_1, \ AX = B_2 \quad \text{et} \quad AX = B_3$$

   d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ sans utiliser la méthode du pivot de Gauss.

   - Soit $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Comme A est inversible, on peut résoudre le système directement de la manière suivante :

     $$\begin{aligned} AX = B_1 \quad &\Leftrightarrow \quad X = A^{-1}B_1 \\ &\Leftrightarrow \quad X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

     Ainsi, le système linéaire $AX = B_1$ admet une unique solution donnée par le vecteur

     $$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

   - De même, le système linéaire $AX = B_2$ admet une unique solution donnée par le vecteur

     $$\boxed{X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

   - De même, le système linéaire $AX = B_3$ admet une unique solution donnée par le vecteur

     $$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Exercice 7 – Résolution rapide grâce à l'inverse. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice A est inversible et donner son inverse.

   On peut montrer (cf Méthode de l'Exercice 8) que la matrice A est inversible et que son inverse est donné par

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

2. En déduire (sans faire le pivot de Gauss !) que le système suivant d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ admet une unique solution que l'on donnera,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ x + 2z = -1 \end{cases}$$

   Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. En passant par l'interprétation matricielle, on obtient,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ x + 2z = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{CAR } A \text{ est inversible} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{en utilisant la question 1} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow (x,y,z) = (5,-1,-3)
\end{aligned}$$

   Ainsi, le sytème linéaire admet une $\boxed{\text{unique solution,}}$ donnée par le triplet $\boxed{(5,-1,-3).}$

Exercice 8 – Calcul d'inverse. Déterminer l'inverse, s'il existe, des matrices suivantes.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Opérations sur A

b) Opérations sur I_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (C_2 \leftarrow C_2 - C_1)\&(C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \qquad \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (C_3 \leftarrow C_3 - C_2) \qquad \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc $\boxed{\text{inversible}}$ et son inverse est donné par

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Vérification.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \qquad \checkmark$$

c) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

De même, on peut montrer que B est $\boxed{\text{inversible}}$ et que son inverse vaut

$$\boxed{B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

d) $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

De même, on peut montrer que C est $\boxed{\text{inversible}}$ et que son inverse vaut

$$\boxed{C^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -10 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}}$$

e) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

De même, on peut montrer que D est $\boxed{\text{inversible}}$ et que son inverse vaut

$$\boxed{D^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

f) $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

De même, on peut montrer que E est $\boxed{\text{inversible}}$ et que son inverse vaut

$$\boxed{E^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

Exercice 9 – Matrices non inversibles. Montrer que les matrices suivantes ne sont pas inversibles.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- **Première méthode (cas particulier d'inversibilité).** La matrice A est de taille 2×2. Son déterminant vaut $\det(A) = 0$. Donc la matrice A n'est pas inversible.
- **Deuxième méthode (échelonnage).** En échelonnant la matrice, on obtient,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$

On peut transformer par opérations élémentaires la matrice en une matrice triangulaire supérieure qui n'a pas tous ses coefficients diagonaux non nuls. La matrice A n'est donc $\boxed{\text{pas inversible.}}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice B est de taille 2×2. Son déterminant vaut $\det(B) = 0$. Donc la matrice B n'est $\boxed{\text{pas inversible.}}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice C est une matrice triangulaire supérieure dont tous ses coefficients ne sont pas non nuls, donc la matrice C n'est $\boxed{\text{pas inversible.}}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Echelonnons la matrice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \& (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1)$$

On peut transformer par opérations élémentaires la matrice en une matrice triangulaire supérieure qui n'a pas tous ses coefficients diagonaux non nuls. La matrice D n'est donc $\boxed{\text{pas inversible.}}$

Exercice 10 – QCM Lien Systèmes/Matrices. Sélectionner la ou les bonne(s) réponse(s).

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système linéaire $AX = B$ peut...
   a) admettre aucune solution
   b) peut admettre une unique solution
   c) peut admettre exactement deux solutions
   d) peut admettre une infinité de solutions
2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ (matrice inversible) et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système linéaire $AX = B$ est...
   a) compatible
   b) admet au moins une solution
   c) admet une unique solution
   d) admet une infinité de solutions
3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système linéaire $AX = B$ admet au moins une solution lorsque...
   a) le système est compatible
   b) lorsque A est inversible
   c) lorsque B est une combinaison linéaire des colonnes de A
   d) lorsque $B = 0_{n,1}$

3 Pour aller plus loin

Exercice 11 – Inverse via un polynôme annulateur. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A - I_3)(A + 3I_3)$.

   En effectuant le calcul, on obtient que

   $$\boxed{(A - I_3)(A + 3I_3) = 0_3}$$

2. En déduire une relation entre A^2, A et I_3.

   D'après la question précédente,

   $$(A - I_3)(A + 3I_3) = 0_3$$

   En développant, on obtient

   $$\boxed{A^2 + 2A - 3I_3 = 0}$$

3. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

   D'après la question précédente, on a,

   $$\begin{aligned} & A^2 + 2A - 3I_3 = 0 \\ \text{donc} \quad & A^2 + 2A = 3I_3 \\ \text{donc} \quad & A(A + 2I_3) = 3I_3 \\ \text{donc} \quad & A\frac{1}{3}(A + 2I_3) = I_3 \end{aligned}$$

   On en déduit que A est $\boxed{\text{inversible}}$ et que

   $$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Exercice 12 – Diagonalisation. On considère les deux matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -6 & 4 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

   En échelonnant la matrice (cf Méthode Exercice 8), on peut montrer que P est $\boxed{\text{inversible}}$ et que son inverse est donné par

   $$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

2. Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

   En effectuant le produit matriciel, on trouve que

   $$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

   qui est bien une matrice diagonale.

3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de D^n.

   Comme D est une matrice diagonale, on montre par récurrence immédiate que

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}}$$

4. Montrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

   Cf DM3

5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n.

Exercice 13 – Étude d'une suite récurrente d'ordre 3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2, u_1 = 1, u_2 = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

On définit les matrices A et P suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

   En échelonnant la matrice P, on trouve que P est inversible et que

   $$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

2. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D.

   On peut calculer que

   $$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

3. En déduire D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   On peut montrer par récurrence que

   $$\boxed{\forall n\ \in \mathbb{N}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$$

4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$
5. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   (a) Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n.

   On a,

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_{n+1} = AX_n}$$

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de X_n en fonction de A^n et X_0.

   On peut montrer par récurrence que,

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = A^nX_0}$$

   (c) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 14 – Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la matrice

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Par la méthode de votre choix, discuter de l'inversibilité de la matrice $M(a)$ en fonction de la valeur du paramètre a. Le cas échéant, donner la valeur de son inverse.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour déterminer l'inversibilité de la matrice $M(a)$, on va l'échelonner.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - aL_1) \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & -a^2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftrightarrow L_3) \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1+a^3 \end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftarrow L_3 + a^2 L_2) \end{aligned}$$

- **Premier cas** : si $1+a^3 = 0$, c'est-à-dire si $a = 1$, alors, la matrice $M(a)$ peut être transformée par opérations élémentaires la matrice en une matrice triangulaire supérieure qui n'a pas tous ses coefficients diagonaux non nuls. La matrice $M(a)$ n'est donc $\boxed{\text{pas inversible.}}$
- **Deuxième cas** : si $1+a^3 \neq 0$, c'est-à-dire si $a \neq 1$, alors, la matrice $M(a)$ peut être transformée par opérations élémentaires la matrice en une matrice triangulaire supérieure qui a tous ses coefficients diagonaux non nuls. La matrice $M(a)$ n'est donc $\boxed{\text{inversible.}}$
En effectuant exactement les mêmes opérations élémentaires sur la matrice I_3, on obtient que l'inverse de $M(a)$ vaut

$$\boxed{M(a)^{-1} = \frac{1}{1+a^3} \begin{pmatrix} 1 & a^2 & -a \\ a^2 & -a & 1 \\ -a & 1 & a^2 \end{pmatrix}}$$

Exercice 15 – Oral PSI Mines-Télécom 2019. Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour se simplifier, on va traiter le cas particulier où la matrice est de taille 3×3, c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le cas général se traite de même. On peut déjà remarquer que A est une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls dont la matrice A est $\boxed{\text{inversible}}$. Pour trouver l'inverse de A, on va échelonner la matrice et faire subir les mêmes opérations à la matrice I_3.

a) Opérations sur A

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (C_2 \leftarrow C_2 - aC_1) \& (C_3 \leftarrow C_3 - a^2 C_1)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (C_3 \leftarrow C_3 - aC_2)$$

b) Opérations sur I_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -a & -a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc $\boxed{\text{inversible}}$ et son inverse est donné par

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 16 – Oral PSI Mines-Télécom 2019. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ telle que

$$\forall i,j \in \{1,\dots,n\}, \qquad a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour se simplifier, on va traiter le cas particulier où la matrice est de taille 3×3, c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour montrer que A est inversible et calculer son inverse, on va échelonner la matrice et faire subir les mêmes opérations à la matrice I_3.

a) Opérations sur A

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - L_3)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (L_1 \leftarrow L_1 - L_3)$$

b) Opérations sur I_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc $\boxed{\text{inversible}}$ et son inverse est donné par

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 17 – Écrit PT Mathématiques A 2013. Soient m, n, p, q, r, s des entiers naturels non nuls. $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes, à coefficients complexes et $\mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à r lignes et s colonnes, à coefficients complexes. $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients complexes. Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ de terme général a_{ij} et $B \in \mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ de terme général b_{ij}.

1. A quelle condition sur p, q, r, s le produit AB est-il bien défini ? Quelle est alors la taille de la matrice AB ?

   Pour $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{C})$, le produit AB est bien défini si et seulement si $\boxed{q = r}$.

   Dans ce cas, $\boxed{AB \in \mathscr{M}_{p,s}(\mathbb{C}).}$

2. Sous cette condition, on note c_{ij} le terme général de la matrice AB. Exprimer c_{ij} en fonction des a_{ij} et b_{ij}.

   Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et $j \in \{1, \ldots, s\}$, on a

$$\boxed{c_{i,j} = \sum_{k=1}^{r} a_{i,k} b_{k,j}}$$