16. Limite d'une suite

1 Limite d'une suite

1.1 Suites convergentes

Définition 1.1 On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** $\ell \in \mathbb{R}$ si

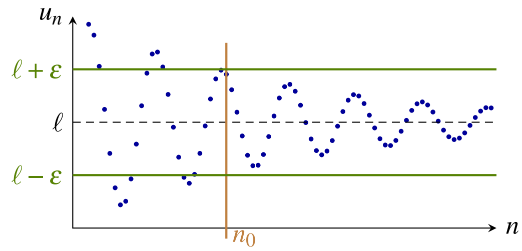
$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0}_{\text{Pour toute précision (aussi petite soit-elle) } \varepsilon>0}, \quad \underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N}}_{\text{il existe un rang } n_0}, \quad \underbrace{\forall n \geqslant n_0}_{\text{à partir duquel}}, \quad \underbrace{u_n \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]}_{\text{tous les termes sont dans la bande de largeur } \varepsilon \text{ autour de } \ell}$$

autrement dit si,

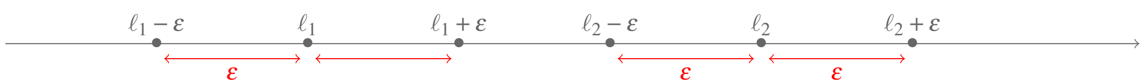
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie alors celle-ci est **unique**. On note

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

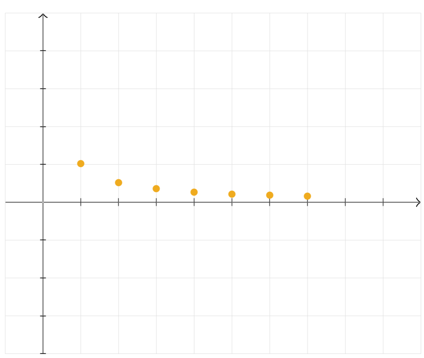


Idée de preuve de l'unicité de la limite.



∎

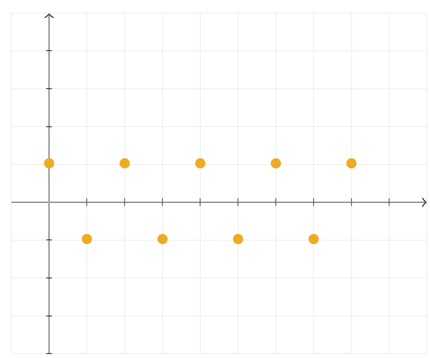
Exemple 1.2 Conjecturer la limite des suites suivantes à partir de leur représentation dans le plan.



Représentation dans le plan de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{1}{n}$$

Conjecture à partir du graphe :



Représentation dans le plan de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = (-1)^n$$

Conjecture à partir du graphe :

Exemple 1.3 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à a, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = a$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

Exemple 1.4 Démontrer que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\,\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Cette définition «avec les ε» permet aussi, connaissant la convergence d'une suite, d'en déduire une «localisation» des termes de la suite et donc d'obtenir des majorations/minorations.

Exemple 1.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 1. Montrer qu'à partir un certain rang, tous les termes de la suite sont minorés par $\frac{1}{2}$, autrement dit, montrer que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq \frac{1}{2}$$

Proposition 1.6 Toute suite convergente est bornée.

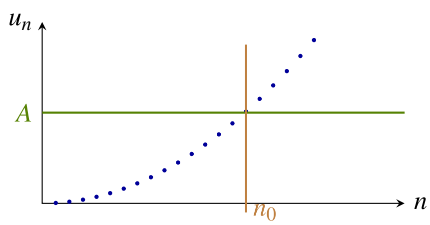
! La réciproque est fausse : la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, mais ne converge pas.

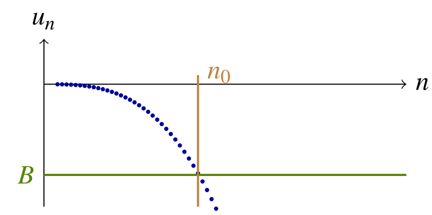
1.2 Suites divergeant vers l'infini

Définition 1.7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$, ce que l'on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, lorsque :
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant A.$$
2. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $-\infty$, ce que l'on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, lorsque :
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant B.$$

! Dire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ signifie que, quel que soit le réel A (aussi grand soit-il), on peut trouver un rang (donné par n_0) à partir duquel tous les termes de la suite $(u_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots)$ sont supérieurs à A.





Exemple 1.8 Démontrer que la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

1.3 Limites possibles pour une suite

En résumé, une suite au voisinage de $+\infty$ peut se comporter de trois manières possibles.
- Soit elle admet une limite finie.
- Soit elle diverge vers $\pm\infty$ (phénomène "*d'explosion*").
- Soit elle n'admet pas de limite (phénomène "*oscillations*").

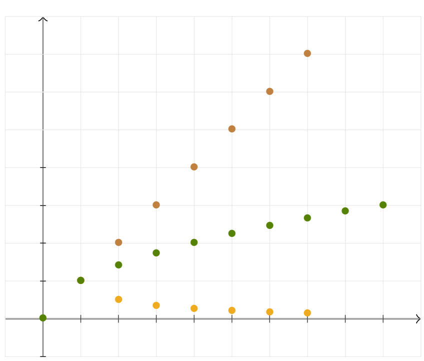
Proposition 1.9 Une suite tendant vers $+\infty$ n'est pas majorée.

La réciproque est fausse : la suite $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée mais ne tend pas vers $+\infty$ (elle n'admet pas de limite.

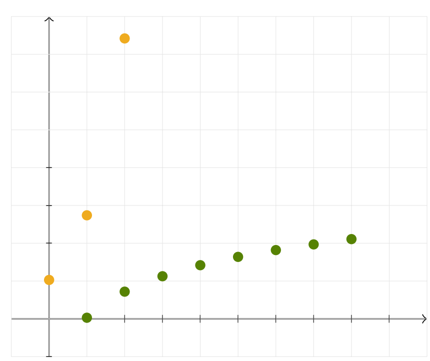
2 Calculs de limite

2.1 Limite de référence

a) Limite des suites usuelles.



Représentation dans le plan des suites :
- $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\frac{1}{n}$
- $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\sqrt{n}$
- $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=n$

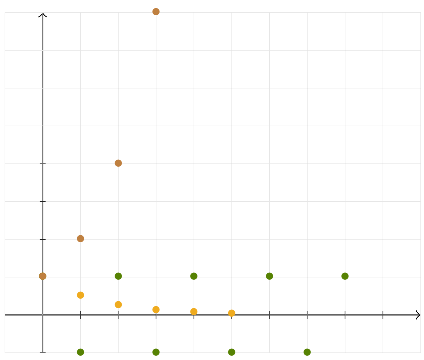


Représentation dans le plan des suites :
- $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\exp(n)$
- $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\ln n$

	Limite	Exemples	Exemples
Puissance positive ($a > 0$)	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^a =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^4 =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}} =$
Puissance négative ($a > 0$)	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-a} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^a} =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-7} =$
Racine carrée	$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} =$		
Exponentielle ($a > 0$)	$\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(an) =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(n) =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(\frac{n}{2}) =$
Logarithme ($a > 0$)	$\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln(n))^a =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln(n))^{\frac{1}{3}} =$

b) Limite d'une suite géométrique.

Pour les suites **géométriques**, la limite dépend de la raison.



Représentation dans le plan des suites :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ($q = 1/2 \in]-1, 1[$)
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$ ($q = -1 \leqslant -1$)
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$ ($q = 2 > 1$)

Raison	Limite	Exemples	Exemples
Si $q \in]-1, 1[$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^n =$
Si $q > 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n =$
Si $q = 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n =$	
Si $q \leqslant -1$		$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$	$((-3)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exemple 2.1 Déterminer la limite de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2^n - 3^n}{3^n - 5^n}$$

Gestes Invisibles/Automatismes. On commencer par évaluer la limite “à l’oeil” pour comprendre si on est face à une FI ou pas. On a

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} 3^n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} 5^n = +\infty$$

Donc, on est face à deux FI de la forme « $+\infty - \infty$ ». Pour s’en débarrasser, on factorise par le terme «le plus fort».

Exemple 2.2 Déterminer la limite de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = n^n$$

2.2 Opération sur les limites

À partir des limites usuelles, on peut en déduire des nouvelles limites en effectuant des opérations sur les limites. Dans les tableaux, **FI** signifie **forme indéterminée**. Cela veut dire que l'opération n'a pas de résultat général, il faudra traiter les exemples au cas pas cas. Les cases non remplies se déduisent par symétrie. Les lettres ℓ et ℓ' désignent des nombres réels. (La règle des signes donne le signe du produit ou du quotient.

a) Somme

! Une seule forme indéterminée peut apparaître lorsque l'on étudie la limite d'une somme :

$$+\infty - \infty$$

Pour la **forme indéterminée** « $+\infty - \infty$ », il faut traiter au cas par cas.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n =$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n =$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-n) =$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2n =$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n =$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n-n) =$

Les autres règles de calcul sont «relativement intuitives».

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	+	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$
ℓ	+	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	+	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	+	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	+	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	+	$-\infty$	F. I.

Exemple 2.3 Déterminer la limite suivante (si elle existe) :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

b) Produit

Une seule forme indéterminée peut apparaître lorsque l'on étudie la limite d'un produit :

$$0 \times \infty$$

Pour la **forme indéterminée** « $0 \times \infty$ », il faut traiter au cas par cas.

$$\begin{array}{lclcl}
\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = & \text{et} & \lim\limits_{n\to+\infty} n = & \text{mais} & \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times n = \\
\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = & \text{et} & \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = & \text{mais} & \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times n^2 = \\
\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = & \text{et} & \lim\limits_{n\to+\infty} n = & \text{mais} & \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \times n =
\end{array}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\times$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$
ℓ	$\times$	ℓ'	$\ell \times \ell'$
$\ell \neq 0$	$\times$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\times$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	$\times$	$\pm\infty$	F. I.

c) Quotient

On suppose ici que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$.

Une seule forme indéterminée peut apparaître lorsque l'on étudie la limite d'un quotient :

$$\frac{0}{0} \quad \text{et} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Pour la **forme indéterminée** « $0/0$ », il faut traiter au cas par cas.

$$\begin{array}{lclcl}
\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = & \text{et} & \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = & \text{mais} & \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \\
\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = & \text{et} & \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = & \text{mais} & \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \\
\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = & \text{et} & \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = & \text{mais} & \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} =
\end{array}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$/$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n/v_n$
ℓ	$/$	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$/$	$\pm\infty$	$0^{\pm}$
$\ell \neq 0$	$/$	$0^{\pm}$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$/$	$0^{\pm}$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$/$	$\pm\infty$	F. I.
0	$/$	0	F. I.

Exemple 2.4 Calculer les limites suivantes à l'aide des limites usuelles et des opérations.

Suite	Raisonnement	Limite
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + \frac{1}{n}$		
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -2\ln(n)$		
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n\ln(n)$		
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$		
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\sqrt{n}}{\mathrm{e}^{-n}-1}$		

Proposition 2.5 — Composition de limites. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et f une fonction telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n)$ est bien définie. Si,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\ell} f(x) = \alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

alors,

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \alpha.$$

Exemple 2.6 Calculer les limites suivantes.

Suite	Raisonnement	Limite
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathrm{e}^{-n}$		
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{2 + \frac{1}{n}}$		

Exemple 2.7 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par

$$\forall n \geq 2, \qquad u_n = (2n)^{\frac{1}{\ln(n)}}$$

Proposition 2.8 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors le produit $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exemple 2.9 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{\sin n}{n}$$

2.3 Résoudre une forme indéterminée

a) Croissances comparées

Il y a 4 formes indéterminées :

$$\text{« } +\infty - \infty \text{ »} \qquad \text{« } 0 \times \infty \text{ »} \qquad \text{« } \frac{0}{0} \text{ »} \qquad \text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ »}$$

Le théorème suivant donne la résolution de ces formes indéterminées dans certains cas bien particuliers.

Proposition 2.10 — Croissances comparées. Soient $a > 0, b > 0$ et $q > 1$. On a

$$\text{i) } \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln(n))^a}{n^b} = 0 \qquad \text{ii) } \lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{q^n} = 0 \quad \left(\text{en part. } \lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{e^{an}} = 0\right) \qquad \text{iii) } \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^a}{q^n} = 0$$

! On peut retenir que

$$(\ln n)^a << \underbrace{n^b}_{n^1<<n^2<<\dots} << \underbrace{q^n}_{2^n<<3^n<<\dots} \quad (\text{avec } q > 1)$$

c'est-à-dire que le logarithme est plus faible que les puissances, les puissances étant plus faibles que les suites géométrique de raison > 1. Pour formaliser cette notion de «suite plus faible qu'une autre», on peut introduire la définition suivante.

Définition 2.11 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telle que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable devant** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On note $u_n = o(v_n)$.

Avec cette nouvelle notation, on peut ré-écrire le théorème de croissances comparées.

Proposition 2.12 — Croissances comparées. Soient $a > 0, b > 0$ et $q > 1$. On a

$$\text{i) } (\ln(n))^a = o(n^b) \qquad \text{ii) } n^b = o(q^n) \qquad \text{iii) } (\ln n)^a = o(q^n)$$

Exemple 2.13 Dans chacun des cas, choisir la bonne relation de comparaison entre les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Comparaison	Justification
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$	$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n^2$		
$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}$	$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n^2}$		
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$	$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 3^n$		
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(n)$	$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n^2$		
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2$	$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n$		

Lorsqu'on fait face à une forme indéterminée, on peut factoriser par le terme dominant puis de conclure en utilisant les croissances comparées.

Exemple 2.14 Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \ln(n) - n^5$$

À priori, on est face à une FI de la forme $+\infty - \infty$. Mais les croissances comparées nous donnent l'idée que c'est «n^5 qui va gagner contre $\ln(n)$» (en fait $\ln(n) = o(n^5)$) et donner la valeur de la limite qui va donc être $-\infty$. Pour formaliser, cela on factorise par le coefficient dominant.

L'idée, illustrée sur l'exemple précédent, est que, dans une somme, les termes les plus faibles (dixit les croissances comparées) peuvent être oubliés. Seul le terme le plus fort importe et va donner la valeur de la limite. On peut formaliser cela grâce à la notion équivalent.

Définition 2.15 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telle que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est équivalente à** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

On note $u_n \sim v_n$.

Définition 2.16 Si $u_n \sim v_n$, alors les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite.

Exemple 2.17 Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \ln(n) - n^5$$

Exemple 2.18 Donner un équivalent simple pour les suites suivantes (on ne demande pas ici de justifier) et en déduire sa limite.

Suite	FI ?	Équivalent	Limite
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - 3n + 2$			
$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln(n) - n^5$			
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 2^n$			
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n^3-5n+1}{n^2+1}$			
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{e^n+n}{n^2+1}$			

3 Théorèmes d'existence de limites

3.1 Théorème d'encadrement

Proposition 3.1 — Existence de limite par encadrement. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles. On suppose que

(H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ (ou seulement à partir d'un certain rang)

(H2) Les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même réel ℓ.

Alors,

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie,
- et plus précisément, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

! Attention, cette proposition est différente de la Proposition 4.7, concernant le passage à la limite dans une inégalité. Dans la Proposition 4.7, on suppose que toutes les suites convergent pour en déduire une information sur leurs limite. Le théorème d'encadement au contraire, sert à montrer qu'une suite converge et donne la valeur de la limite.

Exemple 3.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \leqslant u_n \leqslant 2n.$$

Montrer que la suite $\left(\frac{\ln(u_n)}{\ln(n)}\right)$ admet une limite finie et la déterminer.

Proposition 3.3 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant 0$. On suppose que

(H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant v_n$ (ou seulement à partir d'un certain rang)

(H2) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Alors,

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie,
- et plus précisément, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exemple 3.4 Démontrer que la suite $\left(\frac{(-1)^n+1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Proposition 3.5 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant 0$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On suppose que
(H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant v_n$ (ou seulement à partir d'un certain rang)
(H2) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Alors,
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie,
- et plus précisément, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exemple 3.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - 1| \leq \frac{1}{2^n}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Proposition 3.7 — Existence de limite par majoration/minoration. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ (ou seulement à partir d'un certain rang).
- [Minoration] Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- [Majoration] Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

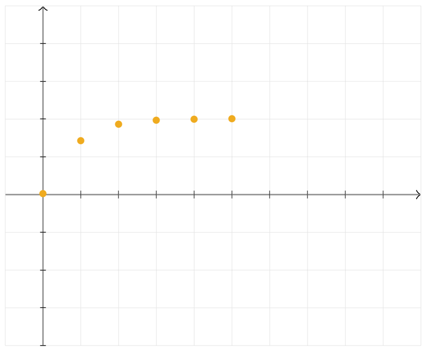
Exemple 3.8 Déterminer la limite des suites suivantes grâce à une minoration/majoration.

Suite	Encadrement	Limite
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^n + \ln(n)$		
$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -n^2 - \mathrm{e}^{-n\sin(n\pi+1)}$		

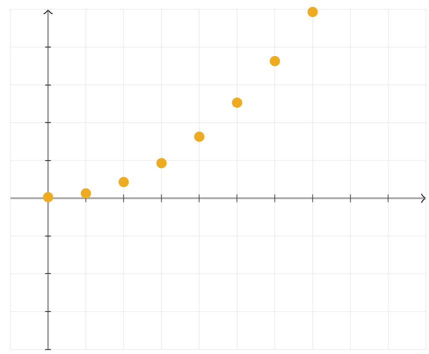
3.2 Théorème de la limite monotone

Proposition 3.9 — Limite monotone.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **croissante**.
   - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** et alors elle converge.
   - Soit elle diverge vers $+\infty$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **décroissante**.
   - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** et alors elle converge.
   - Soit **Sinon** elle diverge vers $-\infty$.



La suite est croissante et majorée, elle converge vers un réel.



La suite est croissante et non majorée, elle diverge donc vers $+\infty$.

Exemple 3.10 On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par,

$$u_0 = -3 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3.$$

Montrer que la suite est majorée par 4 et en déduire qu'elle converge vers un réel à déterminer.

Gestes Invisibles/Automatismes. Pour montrer que la suite converge, on va montrer qu'elle est majorée et croissante. Attention, cette méthode permet de démontrer que la suite converge mais ne donne pas la valeur de la limite. Pour trouver la valeur de la limite, on utilise après la relation de récurrence définissant la suite.

Exemple 3.11 On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par,

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{u_n}$$

Montrer que la suite diverge vers $+\infty$.

3.3 Suites adjacentes

Proposition 3.12 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes** lorsque

(H1) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
(H2) la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
(H3) et la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Dans ce cas,

(R1) les deux suites convergent et ont la même limite ℓ
(R2) et on a l'encadrement suivant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq \ell \leq v_n$$

Exemple 3.13 On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

Montrer que les deux suites convergent.

Gestes Invisibles/Automatismes. On demande d'étudier simultanément la convergence de deux suites qui sont imbriquées. On peut essayer de montrer qu'elles sont adjacentes.

Proposition 3.14 Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est appelé **valeur décimale approchée de x par défaut à 10^{-n} près** et b_n sa **valeur décimale approchée par excès à 10^{-n} près**. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, à valeurs décimales et de limite commune x.

Proposition 3.15 Tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.

4 Propriétés sur les limites

4.1 Suites extraites

Définition 4.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle **suite extraite** (ou sous-suite) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $v_n = u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Illustration :

$$\begin{array}{c|ccccccccccccc}
(u_n)_{n\in\mathbb{N}} & u_0 & \boxed{u_1} & u_2 & \boxed{u_3} & \boxed{u_4} & u_5 & \boxed{u_6} & u_7 & \boxed{u_8} & \boxed{u_9} & \boxed{u_{10}} & \dots \\
 & & = & & = & = & & = & & = & = & = & \\
(v_n)_{n\in\mathbb{N}} & & v_0 & & v_1 & v_2 & & v_3 & & v_4 & v_5 & v_6 & \dots
\end{array}$$

Les premières valeurs de φ sont

n	0	1	2	3	4	5	6
$\varphi(n)$	1	3	4	6	8	9	10

n	0	1	2	3	4	$\dots$
u_n	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	$\dots$
$v_n = u_{n+1}$						$\dots$
$w_n = u_{n+2}$						$\dots$
$t_n = u_{n-1}$						
$p_n = u_{2n}$						
$r_n = u_{2n+1}$						

Proposition 4.2 Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors toutes les suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent aussi vers ℓ :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell, \qquad \lim_{n\to+\infty} u_{n+2} = \ell, \qquad \lim_{n\to+\infty} u_{n-1} = \ell, \qquad \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell, \qquad \text{etc.}$$

Ainsi, toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite. Pour montrer qu'une suite diverge, on se sert souvent de la contraposée de ce théorème.

Proposition 4.3 Si on trouve deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'ont pas la même limite, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exemple 4.4 Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Proposition 4.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont toutes les deux la même limite ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

Autrement dit, si les suites extraites paire et impaire convergent vers la même limite, alors la suite de départ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette même limite.

Exercice 4.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{(-1)^n n}{(-1)^n n + \sqrt{n}}$$

Étudier la convergence de cette suite.

4.2 Passage à la limite dans une inégalité

Proposition 4.7 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que :
(H1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ_1 ;
(H2) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ_2 ;
(H3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ ou $u_n < v_n$.
Alors
$$\ell_1 \leqslant \ell_2$$

! Même si l'inégalité sur les termes des suites est stricte, on n'obtient seulement une inégalité large sur les limites. Par exemple,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{n} > 0 \qquad \text{pourtant} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \geq 0$$

Exemple 4.8 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

On admet les deux assertions suivantes.
(P1) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,2]$ (par *récurence*.)
(P2) On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$ (par *théorème de la limite monotone*).
Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

5 Brève extension aux suites complexes

Définition 5.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

(Ici, $|\cdot|$ désigne le module du nombre complexe et non plus la valeur absolue.) Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

On peut facilement se ramener à l'étude de suites réelles grâce au résultat suivant.

Proposition 5.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Soit $\ell \in \mathbb{C}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si les suites réelles $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$.

Exemple 5.3 Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \left(2 + \frac{1}{n}\right)i$$

Proposition 5.4 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ alors $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\lambda|$.
- Si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Ainsi, pour démontrer qu'une suite complexe converge vers 0, inutile d'étudier les suites réelles des parties réelles et imaginaires, il suffit de montrer que la suite réelle des modules converge vers 0.

Exemple 5.5 Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{(1+i)^n}{2^n}$$

Ce qui reste valable	Ce qui n'est plus valable
Unicité de la limite	Majorant/minorant
Une suite convergente est bornée	Monotonie
Opérations sur les limites	Limites infinies
Suites extraites	Passage à la limite des $\leq$
Majoration de $\lvert u_n - \ell\rvert$ par un réel	Théorème d'encadrement
	Théorème de la limite monotone
	Suites adjacentes