TD 16 – Limite d'une suite

Exercice 1 – Vrai/Faux ?. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Donner un contre-exemple lorsque les assertions sont fausses.

1. Toute suite croissante est minorée.
2. Toute suite convergente est monotone.
3. Toute suite divergeant vers $+\infty$ est croissante.
4. Si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.
5. Si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.
6. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \geq v_n$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

1 Déterminer d'une limite

Exercice 2 – Limites de référence et opérations (sans FI). Étudier les limites des suites suivantes.

1) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = n^3+2n-9$

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = -1+\frac{1}{n^3}-\frac{6}{n}$

3) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3-\mathrm{e}^{2n}}$

4) $\forall n\geqslant 2,\ u_n = 2^n\left(-1+\frac{3}{\sqrt{\ln(n)}}\right)$

5) $\forall n\geqslant 2,\ u_n = \frac{3+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{(\ln n)^2\times 5^n}$

6) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = n^5+6+\mathrm{e}^{-n}$

7) $\forall n\geqslant 2,\ u_n = \frac{2+\frac{1}{\ln n}}{-1+\frac{1}{n}}$

8) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = -n^3-2n+1$

9) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n}-1$

10) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{-1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\mathrm{e}^{-n}+\frac{1}{n^2}}$

Exercice 3 – Déterminer un équivalent des suites suivantes et en déduire leur limite.

a) $\forall n\in\mathbb{N}, u_n = n^2+n^5$

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n = n^2+\frac{1}{n}$

c) $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$

d) $\forall n\in\mathbb{N}, u_n = n^3+5^n$

e) $\forall n\in\mathbb{N}, u_n = 9^n+5^n$

f) $\forall n\in\mathbb{N}, u_n = 2^{-n}+3^{-n}$

g) $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n = \ln(n)+\mathrm{e}^n$

h) $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n = \ln(n)+\mathrm{e}^{-n}$

i) $\forall n\in\mathbb{N}, u_n = n^3+\mathrm{e}^n$

j) $\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \frac{n+1}{2n+2}$

k) $\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \frac{n+1}{n^2+1}$

l) $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n = \frac{\ln(n)+1}{n^2+\frac{1}{n}}$

Exercice 4 – Limites de référence et opérations (avec FI). Étudier les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ suivantes. Soit $1<b<a$.

1) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \frac{2n+1}{1-4n}$

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{3^n}{n^2}$

3) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}+\left(\frac{1}{2}\right)^n+6$

4) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(3n)}{\sqrt{n}}$

5) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n+(-1)^n}{2+\mathrm{e}^{-n}\ln(n)}$

6) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$

7) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n^2+2}-n$

8) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$

Exercice 5 – Reconnaître la nature des deux suites ci-dessous, puis en déduire leur terme général et enfin leur limite.

a) $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=3u_n+2$

b) $v_0=-2$, $v_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+2}=\frac{3}{2}v_{n+1}-\frac{1}{2}v_n$.

2 Théorème d'existence de limite

Exercice 6 – Théorème de la limite monotone. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0=-2 \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leqslant 6$.
2. Montrer que cette suite est croissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie.
4. Déterminer la valeur de cette limite.
5. Déterminer le terme général de la suite. Retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 7 – Théorème de la limite monotone. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0\in[0,1]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+u_n^2}{2}$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[0,1]$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ que l'on précisera.

Exercice 8 – Théorème de la limite monotone. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0=1 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+u_n^4.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. En déduire qu'il existe seulement que deux comportements possibles pour la convergence de la suite.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant 1$.
4. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell\in\mathbb{R}$, alors nécessairement $\ell=0$. *(On pourra utiliser la relation de récurrence de la suite.)*
5. À l'aide des deux questions précédentes, en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers un certain $\ell\in\mathbb{R}$.
6. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3 Limite par encadrement

Exercice 9 – Encadrement avec la valeur absolue. Montrer que les suites suivantes convergent vers 0 :

a) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\frac{(-1)^n}{n}$

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\frac{(-1)^n+2}{n}$

c) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=\frac{(-1)^n(1+n)}{n^2}$

d) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ w_n=\frac{\cos(n)}{n}$

Exercice 10 – Encadrement de sommes finies.

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \qquad u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+k}$$

   (a) Montrer que

$$\forall k\in\{1,\dots,n\}, \qquad \frac{1}{2}\leq\frac{n}{k+n}\leq\frac{n}{n+1}$$

   (b) En déduire que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \qquad \frac{n}{2}\leq u_n\leq n$$

   (c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. En déduire de même la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

Exercice 11 – Soit f_0 la fonction définie sur $[0,1]$ par, pour tout $x \in [0,1]$, $f_0(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ et soit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par, pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) = (1-x)^n \mathrm{e}^{-3x}$. On pose,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$$

3. En déduire la valeur de I_1 et I_2.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
5. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

4 Suites adjacentes

Exercice 12 – Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.
1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \qquad \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.
6. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 13 – Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données ci-dessous forment des couples de suites adjacentes. En déduire que les deux suites sont convergentes.
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

5 Suites extraites

Exercice 14 – Démontrer que les suites, de termes généraux suivants divergent en utilisant des suites extraites adéquates.

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$,

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(2+(-1)^n)(n+3)}{(3+(-1)^n)(n+2)}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n} + \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

Exercice 15 – Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.
1. Montrer que les suites extraites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner un encadrement de sa limite.

6 Suites complexes

Exercice 16 – Etudier la convergence des suites complexes de termes généraux suivants:

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \dfrac{i^n}{n^2}$ b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = \dfrac{n}{1+in}$

7 Approfondissement

Exercice 17 – Considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Démontrer que,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}).$$

2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 18 – Limite et suite récurrente. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Calculer la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$$

4. En déduire l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Retrouver le résultat de la question 2.

Exercice 19 – Limite et suite récurrente. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + \mathrm{e}^{-k})$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$.
   (a) Expliquer pourquoi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_n) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$

(On pourra utiliser que, pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$.)

   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.