TD 16 – Limite d'une suite (Correction)

Exercice 1 – Vrai/Faux ?. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Donner un contre-exemple lorsque les assertions sont fausses.

1. Toute suite croissante est minorée.

   $\boxed{\text{Vrai.}}$ Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante alors

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geq u_{n_0}$$

   et la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée (par son premier terme).

2. Toute suite convergente est monotone.

   $\boxed{\text{Faux.}}$ La suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0, mais est ni croissante ni décroissante (les termes «oscillent», les premiers termes valent $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots$)).

3. Toute suite divergeant vers $+\infty$ est croissante.

   $\boxed{\text{Faux.}}$ La suite $((-1)^n + n)_{n\geq 0}$ diverge vers $+\infty$ (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n + n \geq n-1$), mais est ni croissante ni décroissante (les termes «oscillent», les premiers termes valent $1, 0, 1, \ldots$).

4. Si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

   $\boxed{\text{Faux.}}$ La suite $(|(-1)^n|)_{n\geq 0}$ converge vers 1 (car la suite est constante égalé à 1), pourtant la suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$ ne converge pas (on peut trouver deux suites extraites qui n'ont pas la même limite).

5. Si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

   $\boxed{\text{Vrai.}}$ (Conséquence de la définition de la limite avec les quantificateurs.)

6. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq v_n$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   $\boxed{\text{Faux.}}$ La suite $(n-1)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (-1)^n + n \leq n-1$$

   pourtant la suite $((-1)^n + n)_{n\geq 0}$ n'est pas croissante (les termes «oscillent», les premiers termes valent $1, 0, 1, \ldots$).

1 Déterminer d'une limite

Exercice 2 – Limites de référence et opérations (sans FI). Étudier les limites des suites suivantes.

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^3 + 2n - 9$ $\quad\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -1 + \frac{1}{n^3} - \frac{6}{n}$ $\quad\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1}$

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3 - \mathrm{e}^{2n}}$ $\quad\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

d) $\forall n \geqslant 2,\ u_n = 2^n\left(-1 + \frac{3}{\sqrt{\ln(n)}}\right)$ $\quad\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$

e) $\forall n \geqslant 2,\ u_n = \frac{3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{(\ln n)^2 \times 5^n}$ $\quad\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

f) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^5 + 6 + \mathrm{e}^{-n}$ $\quad\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

g) $\forall n \geqslant 2,\ u_n = \frac{2 + \frac{1}{\ln n}}{-1 + \frac{1}{n}}$ $\quad\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -2}$

h) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -n^3 - 2n + 1$ $\quad\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$

i) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n} - 1$ $\quad\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

j) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{-1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\mathrm{e}^{-n} + \frac{1}{n^2}}$ $\quad\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$

Exercice 3 – Déterminer un équivalent des suites suivantes et en déduire leur limite.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + n^5$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^2 + \frac{1}{n}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^3 + 5^n$

e) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 9^n + 5^n$

f) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{-n} + 3^{-n}$

g) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln(n) + \mathrm{e}^n$

h) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln(n) + \mathrm{e}^{-n}$

i) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^3 + \mathrm{e}^n$

j) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n+1}{2n+2}$

k) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n+1}{n^2+1}$

l) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\ln(n)+1}{n^2+\frac{1}{n}}$

	Suite	Equivalent	Limite
a)	$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + n^5$	$u_n \sim n^5$	$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
b)	$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^2 + \frac{1}{n}$	$u_n = n^2$	$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
c)	$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$	$u_n \sim \frac{1}{n}$	$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
d)	$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^3 + 5^n$	$u_n \sim 5^n$	$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
e)	$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 9^n + 5^n$	$u_n \sim 9^n$	$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
f)	$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{-n} + 3^{-n}$	$u_n \sim 2^{-n}$	$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
g)	$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln(n) + \mathrm{e}^n$	$u_n \sim \mathrm{e}^n$	$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
h)	$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln(n) + \mathrm{e}^{-n}$	$u_n \sim \ln(n)$	$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
i)	$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^3 + \mathrm{e}^n$	$u_n \sim \mathrm{e}^n$	$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
j)	$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n+1}{2n+2}$	$u_n \sim \frac{1}{2}$	$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$
k)	$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n+1}{n^2+1}$	$u_n \sim \frac{1}{n}$	$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
l)	$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\ln(n)+1}{n^2+\frac{1}{n}}$	$u_n \sim \frac{\ln(n)}{n^2}$	$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 4 – Limites de référence et opérations (avec FI). Étudier les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ suivantes. Soit $1 < b < a$.

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2n+1}{1-4n}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\frac{1}{2}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{3^n}{n^2}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(n)}{n^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(3n)}{\sqrt{n}}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n+(-1)^n}{2+\mathrm{e}^{-n}\ln(n)}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

f) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

g) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n^2+2} - n$ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \text{ (en utilisant la quantité conjuguée)}}$

h) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

Exercice 5 – Reconnaître la nature des deux suites ci-dessous, puis en déduire leur terme général et enfin leur limite.

a) $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$

On reconnait une suite **arithmético-géométrique**. En appliquant la méthode, on obtient que le terme général de la suite est donné par

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3^n - 1}$$

Comme $3 > 1$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

b) $v_0 = -2$, $v_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

On reconnait une suite **récurrente linéaire d'ordre 2**. En appliquant la méthode, on obtient que le terme général de la suite est donné par

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 4 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 4}$$

2 Théorème d'existence de limite

Exercice 6 – Théorème de la limite monotone. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = -2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 6$.

   Par récurrence.

2. Montrer que cette suite est croissante.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a:

   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n \\ &= -\frac{1}{2}u_n + 3 \\ &\geqslant -\frac{1}{2} \times 6 + 3 \text{ en utilisant la question précédente} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

   Donc la suite est $\boxed{\text{croissante.}}$

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie.

   La suite $(u_n)_n$ est:
   - majorée (par 6) (cf Question 1)
   - croissante (cf Question 2)

   Donc, par le **théorème de la limite monotone**, la suite $(u_n)_n$ $\boxed{\text{admet une limite finie}}$ que ℓ on note ℓ.

4. Déterminer la valeur de cette limite.

   D'après l'énoncé,

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

   Donc, en passant à la limite, on obtient

   $$\begin{aligned} & \ell = \tfrac{1}{2}\ell + 3 \\ \text{c-a-d} \quad & \tfrac{1}{2}\ell = 3 \\ \text{c-a-d} \quad & \ell = 6. \end{aligned}$$

   Ains, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{converge vers 6.}}$

5. Déterminer le terme général de la suite. Retrouver le résultat de la question précédente.

   La suite $(u_n)_n$ est **arithmético-géométrique**. En déroulant la méthode, on obtient que

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -8\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6}$$

   Donc, on retrouve que la suite $(u_n)_n$ $\boxed{\text{converge vers 6}}$ car

   $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

Exercice 7 – Théorème de la limite monotone. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_n^2}{2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$: «$u_n \in [0,1]$»

   - Initialisation: Pour $n = 0$, $u_0 \in [0,1]$ par hypothèse. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité: On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On a,

   $$\begin{array}{lll} & 0 \leq u_n \leq 1 & \text{par hyp de rec} \\ \text{donc} & 0 \leq u_n^2 \leq 1 & \text{car la fonction } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } [0,+\infty[\\ \text{donc} & 0 \leq u_n + u_n^2 \leq 2 & \text{en sommant les deux inégalités précédentes} \\ \text{donc} & 0 \leq \frac{u_n+u_n^2}{2} \leq 1 & \\ \text{c-à-d} & 0 \leq u_{n+1} \leq 1 & \text{d'après l'énoncé} \end{array}$$

     Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion: Par le principe de récurrence, on a montré que

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [0,1]}$$

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. D'apr§s la question précédente, on sait que

   $$\begin{array}{lll} & u_n \leq 1 & \text{par hyp de rec} \\ \text{donc} & u_n^2 \leq u_n & \text{car } u_n \geq 0 \\ \text{donc} & u_n^2 + u_n \leq 2u_n & \\ \text{donc} & \frac{u_n^2+u_n}{2} \leq u_n & \\ \text{c-à-d} & u_{n+1} \leq u_n & \end{array}$$

   $\boxed{\text{Donc } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ que l'on précisera.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ. Comme

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2}$$

   en laissant tendre n vers $+\infty$, on obtient

   $$\ell = \frac{\ell + \ell^2}{2}$$

   On a donc

   $$\begin{aligned} \ell = \frac{\ell + \ell^2}{2} &\iff 2\ell = \ell + \ell^2 \\ &\iff \ell = \ell^2 \\ &\iff \ell(1-\ell) = 0 \\ &\iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = 1. \end{aligned}$$

   - $\boxed{\text{Si } u_0 = 1}$ alors on peut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{converge vers } 1.}$
   - $\boxed{\text{Si } u_0 < 1}$ comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0$. En passant à la limite, on obtient $\ell \geq u_0 < 1$. Donc nécessairement, $\ell = 0$. Ainsi, dans ce cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{converge vers } 0.}$

Exercice 8 – Théorème de la limite monotone. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^4.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ On a:

   $$u_{n+1} - u_n = u_n^4 \geqslant 0$$

   Donc la suite $(u_n)_n$ est $\boxed{\text{croissante.}}$

2. En déduire qu'il existe seulement que deux comportements possibles pour la convergence de la suite.

   Comme la suite $(u_n)_n$ est croissante, d'après le **théorème de la limite monotone**,

   - soit $(u_n)_n$ est majorée et la suite $\boxed{\text{converge vers un nombre réel } \ell}$
   - soit la suite $\boxed{\text{diverge vers } +\infty.}$

3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

   Raisonnons par **récurrence**. On note pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: " $u_n \geqslant 1$.

   - *Initialisation.* Mque $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_0 \geqslant 1$ D'après l'énoncé, on a $u_0 \geq 0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n\ \in\mathbb{N}$, c'est-à-dire on suppose que

     $$u_n \geqslant 1$$

     Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c-a-d montrons que que

     $$u_{n+1} \geqslant 1$$

     On a $u_{n+1} = u_n + {u_n}^4$.
     on $u_n \geqslant 1$ par hyp de récurrence.
     Donc $u_n^4 \geqslant 1$ car $x \mapsto x^4$ croissante sur $\mathbb{R}^+$.
     Donc $u_n + u_n^4 \geqslant 2$
     Donc. $u_{n+1} \geqslant 2 \geqslant 1$.
     Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que

     $$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant 1}$$

4. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell\in\mathbb{R}$, alors nécessairement $\ell = 0$. *(On pourra utiliser la relation de récurrence de la suite.)*

   Si la suite $(u_n)_n$ converge vers un certain $\ell\in\mathbb{R}$, comme

   $$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + {u_n}^4$$

   en passant à la limite, on obtiendrait

   $$\ell = \ell + \ell^4 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\ell = 0}$$

5. À l'aide des deux questions précédentes, en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers un certain $\ell\in\mathbb{R}$.
6. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Si la suite $(u_n)_n$ converge vers un certain $l\in\mathbb{R}$,

   - d' après la question 4, nécessairement $\ell = 0$
   - d'après la question 3, pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n \geqslant 1$ et donc en passant à la limite, $\ell \geqslant 1$

   Ceci est contradictoire. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers $\ell\in\mathbb{R}$. Alors, d'après le théorème de la limite monotone (cf Question 2), nécessairement, la suite $(u_n)_n$ $\boxed{\text{diverge vers } +\infty.}$

3 Limite par encadrement

Exercice 9 – Encadrement avec la valeur absolue. Montrer que les suites suivantes convergent vers 0 :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

On a,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |u_n| = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{converge vers 0.}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{(-1)^n+2}{n}$

On a, en utilisant **l'inégalité triangulaire**,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |u_n| \leq \frac{3}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{converge vers 0.}}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{(-1)^n(1+n)}{n^2}$

On a,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |u_n| = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{converge vers 0.}}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \frac{\cos(n)}{n}$

On a, en utilisant **l'inégalité triangulaire**,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |u_n| \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{converge vers 0.}}$

Exercice 10 – Encadrement de sommes finies.

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+k}$$

   (a) Montrer que

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}, \qquad \frac{1}{2} \leq \frac{n}{k+n} \leq \frac{n}{n+1}$$

   (b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{n}{2} \leq u_n \leq n$$

   (c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   Correction des trois questions ensemble Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \{1,\dots,n\}$. On a,

$$\begin{array}{ll} & 1 \leq k \leq n \\ \text{donc} & 1+n \leq n+k \leq 2n \\ \text{donc} & \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1} \\ \text{donc} & \boxed{\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{n}{n+k} \leq \dfrac{n}{n+1}} \end{array}$$

   On en déduit que,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+1}$$

   c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{n}{2} \leq u_n \leq n}$$

   En particulier, on a démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n \geq \frac{n}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

   Donc, par minoration, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

2. En déduire de même la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

   De même, on peut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{n}{\sqrt{n+n^2}} \leq v_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

   Comme,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n+n^2}} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = 1$$

   par encadrement, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 1}$$

Exercice 11 – Soit f_0 la fonction définie sur $[0,1]$ par, pour tout $x \in [0,1]$, $f_0(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ et soit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par, pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) = (1-x)^n \mathrm{e}^{-3x}$. On pose,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0.

   On a,

$$\boxed{I_0} = \int_0^1 f_0(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}\right]_0^1 \boxed{= \frac{1}{3}(1-\mathrm{e}^{-3})}$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$I_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x$$

   Posons, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{array}{lcl} u(x) & = & (1-x)^{n+1} \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{-3x} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} u'(x) & = & -(n+1)(1-x)^n \\ v(x) & = & -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} \end{array}$$

   En effectuant une **intégration par parties**, on obtient,

$$\begin{aligned} \boxed{I_{n+1}} &= \left[(1-x)^{n+1} \times \left(-\frac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{-3x}\right]_0^1 - \frac{n+1}{3}\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x \\ &\boxed{= \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3} I_n} \end{aligned}$$

3. En déduire la valeur de I_1 et I_2.

   En utilisant les deux questions précédentes, on a,

$$\boxed{I_1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}I_0 \boxed{= \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-3}}$$

   De même, on obtient,

$$\boxed{I_2 = \frac{5}{27} - \frac{2}{27}\mathrm{e}^{-3}}$$

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0,1]$. On a,

$$\begin{array}{ll} & 0 \leq \mathrm{e}^{-3x} \leq 1 \\ \text{donc} & 0 \leq (1-x)^n \mathrm{e}^{-3x} \leq (1-x)^n \qquad \text{car } (1-x)^n \geq 0 \end{array}$$

   Donc, par **linéarité de l'intégrale**, on en déduit que

$$\int_0^1 0 \,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 1-x)^n \mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 (1-x)^n \mathrm{d}x$$

   c'est-dire après calculs,

$$\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

5. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

On sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

Donc, par **théorème d'encadrement**, la suite $\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$ et sa limite vaut

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

4 Suites adjacentes

Exercice 12 – Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \qquad \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$$

Soient a et b deux réels positifs. On sait que

$$\begin{array}{ll} & (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \\ \text{donc} & a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \\ \text{donc} & \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b) \end{array}$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

Par hypothèse, on sait que

$$u_0 \leq v_0$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant l'inégalité de la question précédente (car tous les termes sont positifs)

$$\sqrt{u_{n-1} v_{n-1}} \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} + v_{n-1})$$

c'est-à-dire

$$\boxed{u_n \leq v_n}$$

4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0 \qquad \text{car } u_n \leq v_n$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\boxed{\text{décroissante.}}$ De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{u_n v_n}}{u_n} = \sqrt{\frac{v_n}{u_n}} \geq 1 \qquad \text{car } u_n \leq v_n$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on en déduit donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \geq u_n$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\boxed{\text{croissante.}}$

5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.

Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, en utilisant la question 2, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq v_n \leq v_0$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par v_0). D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie que l'on note ℓ_1. De même, on montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie que l'on note ℓ_2. Or, on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Donc, en passant à la limite dans cette égalité, on obtient

$$\ell_2 = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}$$

et donc

$$\ell_2 = \ell_1.$$

Les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{convergent vers une même limite.}}$

6. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite donc la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Donc, les suites (u_n) et (v_n) sont $\boxed{\text{adjacentes.}}$

Exercice 13 – Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données ci-dessous forment des couples de suites adjacentes. En déduire que les deux suites sont convergentes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

   - La suite $(u_n)_n$ est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$$
   - La suite $(v_n)_n$ est décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{n-(n+1)}{n(n+1)^2} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)^2} \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$
   - La suite $(\ u_n - v_n\ )$ converge vers 0 car
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n - u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n+\infty]{} 0$$

   Donc les deux suites sont $\boxed{\text{adjacentes}}$ donc les deux suites convergent (vers une même limite).

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

   - La suite $(u_n)_n$ est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+1} - u_n = (...) = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \geqslant 0$$
   - La suite $(v_n)_n$ est décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} - v_n = (...) = -\frac{3n+2}{(2n+2)(2n+1)n} \leqslant 0$$
   - La suite $(\ u_n - v_n\ )$ converge vers 0 car
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n - u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n+\infty]{} 0$$

   Donc les deux suites sont $\boxed{\text{adjacentes}}$ donc les deux suites convergent (vers une même limite).

5 Suites extraites

Exercice 14 – Démontrer que les suites, de termes généraux suivants divergent en utilisant des suites extraites adéquates.

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$

- La suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \xrightarrow[n+\infty]{} 1$$

- La suite extraite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n+\infty]{} -1$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux suites extraites qui convergent vers des limites distinctes, elle est donc $\boxed{\text{divergente.}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{(2+(-1)^n)(n+3)}{(3+(-1)^n)(n+2)}$

- La suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{2n} = \frac{3(2n+3)}{4(2n+2)} \xrightarrow[n+\infty]{} \frac{3}{4}$$

- La suite extraite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{2n+1} = \frac{(2n+4)}{2(2n+3)} \xrightarrow[n+\infty]{} \frac{1}{2}$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux suites extraites qui convergent vers des limites distinctes, elle est donc $\boxed{\text{divergente.}}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n} + \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$

- La suite extraite $(u_{8n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{8n} = \frac{1}{8n} + \cos(2n\pi) = \frac{1}{8n} + 1 \xrightarrow[n+\infty]{} 1$$

- La suite extraite $(u_{8n+4})_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{8n+4} = \frac{1}{8n+4} + \cos((2n+1)\pi) = \frac{1}{8n} - 1 \xrightarrow[n+\infty]{} -1$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux suites extraites qui convergent vers des limites distinctes, elle est donc $\boxed{\text{divergente.}}$

Exercice 15 – Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, par $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites extraites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

   - Montrons que la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a,

   $$\begin{aligned}S_{2(n+1)}-S_{2n}&=S_{2n+2}-S_{2n}\\&=\sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^k}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}\\&=\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}+\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\\&=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}\\&=-\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}\\&\leq 0\end{aligned}$$

   - Montrons que la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a,

   $$\begin{aligned}S_{2(n+1)+1}-S_{2n+1}&=S_{2n+3}-S_{2n+1}\\&=\sum_{k=1}^{2n+3}\frac{(-1)^k}{k}-\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}\\&=\frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3}+\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}\\&=-\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+2}\\&=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}\\&\geq 0\end{aligned}$$

   - Montrons que la suite $(S_{2n+1}-S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a,

   $$\begin{aligned}S_{2n+1}-S_{2n}&=\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}\\&=\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\\&=-\frac{1}{2n+1}\\&\xrightarrow[n+\infty]{}0\end{aligned}$$

   Donc, les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont $\boxed{\text{adjacentes.}}$

2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner un encadrement de sa limite.

   Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc elles admettent la même limite ℓ (théorème sur les suites adjacentes). Donc (théorème sur les suites extraites), la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la $\boxed{\text{même limite } \ell.}$ De plus, comme la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on sait que

   $$\forall n\in\mathbb{N},\qquad S_{2n}\leq S_2=-\frac{1}{2}$$

   De même,

   $$\forall n\in\mathbb{N},\qquad S_{2n+1}\geq S_1=-1$$

Donc, en passant à la limite dans les deux inégalités, on obtient,

$$\boxed{-1 \leq \ell \leq -\frac{1}{2}}$$

6 Suites complexes

Exercice 16 – Etudier la convergence des suites complexes de termes généraux suivants:

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n = \dfrac{i^n}{n^2}$

On peut commencer par remarquer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |z_n| = \frac{|i|^n}{|n^2|} = \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{converge vers } 0.}$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \dfrac{n}{1+in}$

On peut commencer par remarquer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad z_n = \frac{n(1-in)}{1+n^2} = \frac{n}{1+n^2} - i\frac{n^2}{1+n^2}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{Re}(z_n) = \frac{n}{1+n^2} \sim \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et aussi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{Im}(z_n) = -\frac{n^2}{1+n^2} \sim 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$$

Ainsi, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{converge vers } -i.}$

7 Approfondissement

Exercice 17 – Considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Démontrer que,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}).$$

2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = 2\frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

$$= 2\frac{(\sqrt{k+1})^2-(\sqrt{k})^2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

$$= 2\frac{k+1-k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

Or $k+1 \geqslant k$

donc $\sqrt{k+1} \geqslant \sqrt{k}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0;+\infty[$

donc $\sqrt{k+1}+\sqrt{k} \geqslant 2\sqrt{k}$

donc $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$ car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$

Finalement,

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$$

2. D'après la question précédente,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

Donc en sommant, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

c-a-d

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \geqslant 2(\sqrt{n+1}-1)$$ en reconnaissant une somme telescopique à droite

Or la suite $(\sqrt{n+1}-1)_n$ diverge vers $+\infty$.
Donc par minoration, la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 18 – Limite et suite récurrente. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Calculer la somme suivante
$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)$$
4. En déduire l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Retrouver le résultat de la question 2.

1. $\boxed{\text{Croissante}}$: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n = \frac{1}{6}(3n+2) \geqslant 0$

2. Comme la suite est croissante, par théorème de la limite monotone,
   - soit $(u_n)_n$ converge vers une limite finie
   - soit $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$

Sps par l'absurde que $(u_n)_n$ cv vers une limite finie $\ell\in\mathbb{R}$.
Or, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\underbrace{u_{n+1}}_{\to\ell} = \underbrace{u_n}_{\to\ell} + \underbrace{\frac{1}{6}(3n+2)}_{\to+\infty}$

Absurde. Donc
$\boxed{(u_n)_n \text{ diverge vers } +\infty}$

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
D'une part, par télescopage
$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = u_n - u_0$$

D'autre part, en utilisant la relation de récurrence,
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{3k+2}{6}\\ &= \frac{1}{6}\left(3\times\frac{n(n-1)}{2} + 2n\right)\\ &= \frac{n(n-1)}{4} + \frac{n}{3}\\ &= \frac{3n^2+n}{12}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{3n^2+n}{12}}$

4. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$