Interrogation du 09/12/2025

NOM Prénom :

1. On considère l'équation différentielle

$$(E_1) \qquad y' - 2y = t$$

(a) Donner la nature de l'équation différentielle (E_1).

On est face à une équation différentielle $\boxed{\text{linéaire d'ordre 1 à coefficient constant.}}$

(b) Donner l'équation différentielle homogène associée à (E_1) et la résoudre.

L'équation différentielle homogène associée à (E_1) est donnée par

$$\boxed{(E_h) \qquad y' - 2y = 0}$$

Les solutions sont de la forme

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{2t} \end{array} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

(c) Donner une solution particulière pour l'équation différentielle (E_1). *On pourra la chercher sous la forme $t \mapsto at+b$ avec a et b deux constantes à déterminer.*

Le **second membre** est un **polynôme** de degré 1. On peut chercher une solution particulière de (E_1) sous la forme $y_p : t \mapsto at+b$ où a et b sont des constantes à déterminer par substitution Soient a et b deux réels et $y_p : t \mapsto at+b$. La fonction y_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } (E) \quad & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ y_p'(t) - 2y_p(t) = t \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ a - 2(at+b) = t \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ -2at + (a-2b) = t \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2a = 1 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \qquad \text{(identification des coefficients)} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad y_p : t \mapsto -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ainsi, <u>une</u> solution particulière sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle est la fonction

$$y_p : t \mapsto -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$$

(d) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

Les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont de la forme

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \end{array} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

Tournez la page ➔

2. On considère l'équation différentielle

$$(E_2) \qquad y'' - y' - 2y = 0$$

(a) Donner la nature de l'équation différentielle (E_2).

On est face à une équation différentielle $\boxed{\text{linéaire d'ordre 2 à coefficients constants homogène.}}$

(b) Donner l'équation caractéristique associée à (E_2) et la résoudre.

L'équation caractéristique associée à (E_2) est donnée par

$$\boxed{r^2 - r - 2 = 0}$$

On est face à une équation de second degré. On peut commencer par calculer son discriminant qui vaut

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles données par :

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = \boxed{2} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = \boxed{-1}$$

(c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_2).

Les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont de la forme

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & A\mathrm{e}^{-t} + B\mathrm{e}^{2t} \end{array} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}}$$