DM 4

À rendre pour le mardi 16 décembre (facultatif)

Exercice 1 – Dans cet exercice, on étudie les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 5y = f(x)\mathrm{e}^{-x} \quad (E)$$

pour différentes expressions de la fonction réelle f.

1. Déterminer les solutions réelles de l'équation homogène associée à (E).

   L'équation homogène associée à (E) est :

   $$y'' - 2y' + 5y = 0$$

   C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants. Pour la résoudre, on commence par étudier son équation caractéristique donnée par

   $$r^2 - 2r + 5 = 0$$

   C'est une équation de second degré dont le discriminant vaut $\Delta = -16 = (4i)^2$. Comme $\Delta \neq 0$, cette équation admet deux solutions complexes données par

   $$z_1 = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i$$

   Ainsi, les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont donc les fonctions

   $$\boxed{x \longmapsto \mathrm{e}^{x}(A\cos(2x) + B\sin(2x)) \quad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2.}$$

2. On suppose dans cette question que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$. Déterminer <u>une</u> solution particulière φ_1 de l'équation

   $$y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^{-x} \quad (E_1).$$

   (Le second membre est une fonction exponentielle dont le «coefficient» (-1) n'est pas une racine de l'équation caractéristique.) On peut chercher <u>une</u> solution particulière de (E_1) sous la forme $\varphi_1 : x \mapsto a\mathrm{e}^{-x}$ avec a une constante à déterminer.

   $$\begin{aligned} \varphi_1 \text{ est solution de } (E_1) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ a\mathrm{e}^{-x} - 2(-a\mathrm{e}^{-x}) + 5a\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 8a\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} \\ &\iff a = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

   Ainsi, une solution particulière de (E_1) est

   $$\boxed{\varphi_1 : x \mapsto \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-x}}$$

3. On suppose dans cette question que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x+2$. On pose,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_2(x) = \frac{1}{16}(2x+5)\mathrm{e}^{-x}$$

Montrer que φ_2 est <u>une</u> solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = (x+2)\mathrm{e}^{-x} \quad (E_2).$$

La fonction φ_2 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_2'(x) = \frac{1}{16}(2-2x-5)\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{16}(-3-2x)\mathrm{e}^{-x}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_2''(x) = \frac{1}{16}(-2+3+2x)\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{16}(1+2x)\mathrm{e}^{-x}$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi_2''(x) - 2\varphi_2'(x) + 5\varphi_2(x) &= \frac{1}{16}\left((1+2x)\mathrm{e}^{-x} - 2(-3-2x)\mathrm{e}^{-x} + 5(2x+5)\mathrm{e}^{-x}\right)\\ &= \frac{1}{16}(16x+32)\mathrm{e}^{-x}\\ &= (x+2)\mathrm{e}^{-x}.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi_2 \text{ est bien } \underline{\text{une}} \text{ solution particulière de l'équation différentielle } (E_2).}$

4. On suppose dans cette question que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$.
   (a) Déterminer <u>une</u> solution particulière complexe $\varphi_{\mathbb{C}}$ de l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^{x(-1+i)} \quad (E_{\mathbb{C}}).$$

(Le second membre est une fonction exponentielle dont le «coefficient» $(-1+i)$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique.) On peut chercher <u>une</u> solution particulière de (E_1) sous la forme $\varphi_{\mathbb{C}} : x \mapsto a\mathrm{e}^{x(-1+i)}$ avec a une constante (ici complexe) à déterminer.

$$\begin{aligned}&\varphi_{\mathbb{C}} \text{est solution de } (E_{\mathbb{C}})\\ \iff\ & \forall x \in \mathbb{R},\ -2ai\mathrm{e}^{x(-1+i)} - 2a(-1+i)\mathrm{e}^{x(-1+i)} + 5a\mathrm{e}^{x(-1+i)} = \mathrm{e}^{x(-1+i)}\\ \iff\ & -2ai + 2a - 2ai + 5a = 1\\ \iff\ & a(7-4i) = 1\\ \iff\ & a = \frac{1}{7-4i}.\end{aligned}$$

Une solution particulière $\varphi_{\mathbb{C}}$ de $(E_{\mathbb{C}})$ est donc

$$\boxed{\varphi_{\mathbb{C}} : x \mapsto \frac{1}{7-4i}\mathrm{e}^{x(-1+i)}}$$

   (b) Déduire des questions précédentes <u>une</u> solution particulière réelle φ_3 de l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = \sin(x)\mathrm{e}^{-x} \quad (E_3).$$

On peut commencer par remarquer que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(x)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{ix})\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{x(-1+i)})$$

Ainsi, si $\varphi_{\mathbb{C}}$ est une solution particulière de $y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^{x(-1+i)}$, alors $\mathrm{Im}(\varphi_{\mathbb{C}})$ est une solution particulière de $y'' - 2y' + 5y = \sin(x)\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi, en utilisant le résultat de la question précédente,

$$\varphi_3 : x \mapsto \mathrm{Im}\left(\frac{1}{7-4i}\mathrm{e}^{x(-1+i)}\right)$$

est une solution particulière de (E_3). Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(\frac{1}{7-4i}\mathrm{e}^{x(-1+i)}\right) &= \operatorname{Im}\left(\frac{7+4i}{65}\mathrm{e}^{-x}\times\mathrm{e}^{ix}\right)\\
&= \operatorname{Im}\left(\left(\frac{7}{65}+i\frac{4}{65}\right)\times\mathrm{e}^{-x}\times(\cos x+i\sin x)\right)\\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{7}{65}\mathrm{e}^{-x}\cos x-\frac{4}{65}\mathrm{e}^{-x}\sin x+i\left(\frac{4}{65}\mathrm{e}^{-x}\cos x+\frac{7}{65}\mathrm{e}^{-x}\sin x\right)\right)\\
&= \frac{4}{65}\mathrm{e}^{-x}\cos x+\frac{7}{65}\mathrm{e}^{-x}\sin x
\end{aligned}$$

Ainsi, une solution particulière de (E_3) est

$$\boxed{\varphi_3 : x \mapsto \frac{4}{65}\mathrm{e}^{-x}\cos x+\frac{7}{65}\mathrm{e}^{-x}\sin x}$$

5. On suppose dans cette question que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 16x+29+4\sin(x)$. Des questions précédentes, déduire en fonction de φ_1, φ_2 et φ_3, toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y''-2y'+5y = (16x+29+4\sin(x))\mathrm{e}^{-x} \quad (E_4).$$

Pour trouver une solution particulière, on ne se lancera pas dans de longs calculs mais on essayera d'appliquer un principe du cours...

L'équation (E_4) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

- **Étape 1 : Résolution de l'équation différentielle homogène associée.** D'après la Question 1, les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont donc les fonctions
$$x \longmapsto \mathrm{e}^{x}(A\cos(2x)+B\sin(2x)) \quad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$
- **Étape 2 : Trouver une solution particulière de (E_4).** On peut commencer par remarquer que le second membre de (E_4) peut se mettre sous la forme
$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (16x+29+4\sin(x))\mathrm{e}^{-x} &= (16x+32-3+4\sin(x))\mathrm{e}^{-x}\\
&= -3\mathrm{e}^{-x}+16(x+2)\mathrm{e}^{-x}+4\sin(x)\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$
Or,
  - φ_1 est une solution particulière de $y''-2y'+5y = \mathrm{e}^{-x}$ (cf Question 2),
  - φ_2 est une solution particulière de $y''-2y'+5y = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$ (cf Question 3),
  - et φ_3 est une solution particulière de $y''-2y'+5y = \sin(x)\mathrm{e}^{-x}$ (cf Question 4(b)).

  Donc, d'après le principe de superposition,
$$-3\varphi_1+16\varphi_2+4\varphi_3$$
est une solution particulière de (E_4)
- **Étape 3 : Résolution de (E_4).** Les solutions de l'équation (E_4) sont donc les fonctions
$$\boxed{x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}(A\cos(2x)+B\sin(2x))-3\varphi_1(x)+16\varphi_2(x)+4\varphi_3(x) \text{ avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2.}$$