TD 02 – Trigonométrie (Correction)

Exercice 1 – Repérage d'angles. Placer les angles concernés sur le cercle trigonométrique et en déduire les valeurs suivantes.

a) $\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)$

On peut commencer par remarquer que

$$\frac{7\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \qquad \text{car } \frac{7\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\times 2\pi$$

Ainsi,

$$\boxed{\sin\left(\tfrac{7\pi}{2}\right)} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \boxed{= -1}$$

b) $\cos\left(\frac{17\pi}{6}\right)$

On peut commencer par remarquer que

$$\frac{17\pi}{6} \equiv \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi] \qquad \text{car } \frac{17\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 1\times 2\pi$$

Ainsi,

$$\boxed{\cos\left(\tfrac{17\pi}{6}\right)} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \boxed{= -\tfrac{\sqrt{3}}{2}}$$

c) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

- On peut commencer par remarquer que

$$-\frac{3\pi}{4} \equiv \frac{5\pi}{4} \quad [2\pi] \qquad \text{car } -\frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} - 1\times 2\pi$$

  Ainsi,

$$\boxed{\sin\left(-\tfrac{3\pi}{4}\right)} = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \boxed{= -\tfrac{\sqrt{2}}{2}}$$

- On peut aussi utiliser directement l'imparité du sinus, pour obtenir que,

$$\boxed{\sin\left(-\tfrac{3\pi}{4}\right)} = -\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \boxed{= -\tfrac{\sqrt{2}}{2}}$$

d) $\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$

On peut commencer par remarquer que

$$-\frac{8\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3} \ [2\pi] \qquad \text{car } -\frac{8\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2 \times 2\pi$$

Ainsi,

$$\boxed{\cos\left(-\tfrac{8\pi}{3}\right)} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \boxed{= -\tfrac{1}{2}}$$

Exercice 2 – Utilisation de la relation fondamentale. Soit $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ tel que $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$. En déduire $\sin(\theta)$.

On sait que,

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

et donc que

$$\begin{aligned}
\sin^2(\theta) &= 1 - \cos^2(\theta) \\
&= 1 - \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{16} \\
&= \frac{6 + \sqrt{3}}{8} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}$$

Or $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ donc $\sin(\theta) < 0$. Donc,

$$\boxed{\sin(\theta) = -\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}}}$$

Exercice 3 – Utilisation des formules d'addition. Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide des *formules d'addition*, simplifier les quantités suivantes.

a) $\cos(x+17\pi)$

- En utilisant la formule d'addition, on obtient,

$$\begin{aligned}\boxed{\cos(x+17\pi)} &= \cos(x)\cos(17\pi) - \sin(x)\sin(17\pi)\\ &= \cos(x)\times(-1) - \sin(x)\times 0\\ &\boxed{= -\cos(x)}\end{aligned}$$

- Ou en utilisant la 2π-périodicité du cosinus, puis grâce aux symétriques, on obtient,

$$\boxed{\cos(x+17\pi)} = \cos(x+\pi) \boxed{= -\cos(x)}$$

b) $\sin(-x+8\pi)$

- En utilisant la formule d'addition, on obtient,

$$\begin{aligned}\boxed{\sin(-x+8\pi)} &= \sin(8\pi - x)\\ &= \sin(8\pi)\cos(x) - \cos(8\pi)\sin(x)\\ &= 0\times\cos(x) - 1\times\sin(x)\\ &\boxed{= -\sin(x)}\end{aligned}$$

- Ou en utilisant la 2π-périodicité et l'imparité du sinus,

$$\boxed{\sin(-x+8\pi)} = \sin(-x) \boxed{= -\sin(x)}$$

c) $\boxed{\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)} = \cos(x)\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos(x)\times 0 - \sin(x)\times(-1) \boxed{= \sin(x)}$

d) $\sin(x+\pi) + \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

Tout d'abord, on peut calculer que

$$\begin{aligned}\sin(x+\pi) &= \sin(x)\cos(\pi) + \cos(x)\sin(\pi) = -\sin(x)\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)\end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que,

$$\boxed{\sin(x+\pi)+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = -\sin(x)+\sin(x) \boxed{= 0}$$

e) $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)-\sin(x) = 0$

Tout d'abord, grâce aux formules d'addition, on peut calculer que

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$$
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

Ainsi, on en déduit que,

$$\boxed{\cos\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)} = \sin(x)-\sin(x) \boxed{=0}$$

Exercice 4 – Utilisation des formules de trigonométrie.

a) En remarquant que $2 \times \frac{5\pi}{8} = \frac{5\pi}{4}$, calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$.

On commence par remarquer que

$$2 \times \frac{5\pi}{8} = \frac{5\pi}{4}$$

Ainsi, grâce à la **formule de linéarisation**, on a,

$$\cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Donc,

$$\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \qquad \text{ou} \qquad \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

Or, $\frac{5\pi}{8} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) < 0$. Ainsi,

$$\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$$

Finalement, on a,

$$\boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

b) En remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$, calculer $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

En utilisant la **formule d'addition**, on a,

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)} \\
&= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\times\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \\
&= \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \\
&= \frac{4+2\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Finalement, on a,

$$\boxed{\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2+\sqrt{3}}$$

Exercice 5 – Utilisation des formules de symétrie. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

a) $A=\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{10\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{13\pi}{7}\right)$

- **Méthode 1 : Grâce aux formules de symétrie.** On peut remarquer que

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{13\pi}{7}\right)&=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{7}\right)\\&=\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\\&=-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\end{aligned}$$

  De même,

$$\sin\left(\frac{10\pi}{7}\right)=-\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)$$

  Et donc, $\boxed{A=0.}$

- **Méthode 2 : Grâce aux formules de factorisation.** En «regroupant les sinus deux par deux», on a,

$$\begin{aligned}\boxed{A}&=\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{13\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{10\pi}{7}\right)\\&=2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{7}+\frac{13\pi}{7}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{7}-\frac{13\pi}{7}}{2}\right)+2\sin\left(\frac{\frac{4\pi}{7}+\frac{10\pi}{7}}{2}\right)\cos\left(\frac{4\frac{\pi}{7}-\frac{10\pi}{7}}{2}\right)\\&=2\sin(\pi)\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)+2\sin(\pi)\cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right)\\&=2\times0\times\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)+2\times0\times\cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right)\\&\boxed{=0}\end{aligned}$$

b) $B=\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

On peut remarquer que

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)&=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)\\&=-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\end{aligned}$$

De même,

$$\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)=-\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

On en déduit que

$$B=2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$$

Or,

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Et donc,

$$\boxed{B}=2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\ \boxed{=2}$$

Exercice 6 – Utilisation des formules de factorisation. Soient p et q deux réels tels que $\sin(p)+\sin(q) \neq 0$. Simplifier l'expression

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$$

En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

Soient p et q deux réels tels que $\sin(p)+\sin(q) \neq 0$. En utilisant les **formules de factorisation**, on a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\tfrac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}} &= \frac{-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)} \\
&= -\frac{\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}{\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)} \\
&\boxed{= -\tan\left(\frac{p-q}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Pour calculer la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$, on peut remarquer que

$$\frac{\pi}{24} = \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}}{2}$$

et donc, en appliquant la formule précédente, on obtient,

$$\begin{aligned}
\boxed{\tan\left(\tfrac{\pi}{24}\right)} &= -\frac{\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4}} \\
&= -\frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= -\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \\
&\boxed{= \sqrt{6} - 2 - \sqrt{3} + \sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Exercice 7 – Formules de l'angle moitié. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que toutes les quantités de l'exercice soient bien définies. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

1. (a) Exprimer $\cos(x)$ en fonction de $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

   D'après la **formule de duplication**,

   $$\boxed{\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}$$

   (b) Exprimer $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ en fonction de $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

   En utilisant les deux formules donnant la **dérivée de la fonction tangente**, on a,

   $$1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

   et donc, en inversant la relation

   $$\boxed{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2}}$$

   (c) En déduire que

   $$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

   En combinant les deux formules, on a,

   $$\boxed{\cos(x)} = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 2 \times \frac{1}{1+t^2} - 1 \boxed{= \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

2. De même, montrer que

   $$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

   En utilisant la **formule de duplication**, on a,

   $$\sin(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2t\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

   Or,

   $$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2}$$

   On en déduit que,

   $$\boxed{\sin(x)} = 2t \times \frac{1}{1+t^2} \boxed{= \frac{2t}{1+t^2}}$$

3. En déduire que

   $$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

   On a,

   $$\boxed{\tan(x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \boxed{= \frac{2t}{1-t^2}}$$

Exercice 8 – Utilisation des formules. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que toutes les quantités suivantes soient bien définies.

1. Exprimer $(\cos(x)+\sin(x))^2$ en fonction de $\sin(2x)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}\boxed{(\cos(x)+\sin(x))^2} &= \cos^2(x)+2\cos(x)\sin(x)+\sin^2(x)\\ &= 1+2\cos(x)\sin(x)\\ &\boxed{= 1+\sin(2x)}\end{aligned}$$

2. Exprimer $\cos^4(x)-\sin^4(x)$ en fonction de $\cos(2x)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}\boxed{\cos^4(x)-\sin^4(x)} &= (\cos^2(x))^2-(\sin^2(x))^2\\ &= (\cos^2(x)+\sin^2(x))(\cos^2(x)-\sin^2(x))\\ &= 1\times\cos(2x)\\ &\boxed{= \cos(2x)}\end{aligned}$$

3. Exprimer

$$\frac{\sin(3x)}{\sin(x)}+\frac{\cos(3x)}{\cos(x)}$$

   en fonction de $\cos(2x)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x) \neq 0$ et $\sin(x) \neq 0$ (on pourrait détailler plus précisément l'ensemble auquel doit appartenir x mais ce n'est pas fait ici). On a,

$$\begin{aligned}\boxed{\frac{\sin(3x)}{\sin(x)}+\frac{\cos(3x)}{\cos(x)}} &= \frac{\sin(2x+x)}{\sin(x)}+\frac{\cos(2x+x)}{\cos(x)}\\ &= \frac{\sin(2x)\cos(x)+\cos(2x)\sin(x)}{\sin(x)}+\frac{\cos(2x)\cos(x)-\sin(2x)\sin(x)}{\cos(x)}\\ &= \frac{\sin(2x)\cos(x)}{\sin(x)}+\cos(2x)+\cos(2x)-\frac{\sin(2x)\cos(x)}{\sin(x)}\\ &\boxed{= 2\cos(2x)}\end{aligned}$$

4. Montrer que

$$1+\frac{1}{\cos(2x)}=\frac{\tan(2x)}{\tan(x)}$$

   Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\tan(x) \neq 0$ (ensemble à détailler...). On a,

$$\begin{aligned}\boxed{\frac{\tan(2x)}{\tan(x)}} &= \frac{\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}\\ &= \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\times\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\\ &= \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos(2x)}\times\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\\ &= \frac{2\cos^2(x)}{\cos(2x)}\\ &= \frac{\cos(2x)+1}{\cos(2x)}\\ &\boxed{= 1+\frac{1}{\cos(2x)}}\end{aligned}$$

Exercice 9 – Inégalité sur le cosinus. Démontrer que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$$

On pourra tracer le tableau de variations de la fonction $x \mapsto \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$.

Soit $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$$

La fonction f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad f'(x) = -\sin(x) + x \geqslant 0$$

d'après l'inégalité sur le sinus du cours. On obtient ainsi le tableau de variations suivant pour f.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$1 - \frac{\pi^2}{8}$

En particulier, on en déduit que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad f(x) \geqslant 0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \qquad \cos(x) \geqslant 1 - \tfrac{x^2}{2}}$$

Exercice 10 – Équations trigonométriques. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $\sin(x) = \frac{1}{2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\sin(x) = \tfrac{1}{2}} \quad &\Leftrightarrow \quad \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \\
&\boxed{\Leftrightarrow \quad x \equiv \tfrac{\pi}{6}\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \tfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]}
\end{aligned}$$

b) $\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\cos(x) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}} \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\
&\boxed{\Leftrightarrow \quad x \equiv \tfrac{3\pi}{4}\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\tfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]}
\end{aligned}$$

c) $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\boxed{\cos(x) = \cos\left(\tfrac{\pi}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv \tfrac{\pi}{5}\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\tfrac{\pi}{5}\ [2\pi]}$$

d) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\cos\left(3x - \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \tfrac{3\pi}{4}\right)} \quad &\Leftrightarrow \quad 3x - \frac{\pi}{2} \equiv x + \frac{3\pi}{4}\ [2\pi] \text{ ou } 3x - \frac{\pi}{2} \equiv -\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)\ [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad 2x \equiv \frac{5\pi}{4}\ [2\pi] \text{ ou } 4x \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \\
&\boxed{\Leftrightarrow \quad x \equiv \tfrac{5\pi}{8}\ [\pi] \text{ ou } x \equiv -\tfrac{\pi}{16}\ \left[\tfrac{\pi}{2}\right]}
\end{aligned}$$

e) $\sin(2x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\sin(2x) = \sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)} \quad &\Leftrightarrow \quad 2x \equiv x + \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } 2x \equiv \pi - \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\ [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } 3x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\
&\boxed{\Leftrightarrow \quad x \equiv \tfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \tfrac{\pi}{6} [\tfrac{2\pi}{3}]}
\end{aligned}$$

f) $\sin(3x) = \cos(x+\pi)$ *On pourra commencer par montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(3x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ (un sinus est un cosinus qui s'ignore...)*

Soit $x \in \mathbb{R}$. On peut commencer par remarquer que,

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(3x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(3x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(3x)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\boxed{\sin(3x) = \cos(x+\pi)} \quad &\Leftrightarrow \quad \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x+\pi) \\
&\Leftrightarrow \quad 3x - \frac{\pi}{2} \equiv x + \pi\ [2\pi] \text{ ou } 3x - \frac{\pi}{2} \equiv -(x+\pi)\ [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad 2x \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } 4x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\
&\boxed{\Leftrightarrow \quad x \equiv \tfrac{3\pi}{4}\ [\pi] \text{ ou } x \equiv -\tfrac{\pi}{8}\ [\tfrac{\pi}{2}]}
\end{aligned}$$

Exercice 11 – Inéquations trigonométriques. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $\cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Soit $x \in [-\pi, \pi]$. Par lecture graphique, on obtient que,

$$\begin{aligned} \cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par 2π-périodicité du cosinus, on en déduit que

$$\cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \left]-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \tfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right[}$$

b) $2\sin(x) + 1 \leqslant 0$

Soit $x \in [0, 2\pi]$. Par lecture graphique, on obtient que,

$$\begin{aligned} 2\sin(x) + 1 \leqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin(x) \leqslant -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{7\pi}{6} < x < -\frac{11\pi}{6} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right] \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par 2π-périodicité du cosinus, on en déduit que

$$2\sin(x) + 1 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \left[\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right]$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\tfrac{7\pi}{6} + 2k\pi, \tfrac{11\pi}{6} + 2k\pi\right]}$$

c) $2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}<0$

Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $x-\frac{\pi}{3}\in[0,2\pi]$, c'est-à-dire soit $x\in[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{3}]$. Par lecture graphique, on obtient que,

$$\begin{aligned}
2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}<0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{5\pi}{6}<x-\frac{\pi}{3}<\frac{7\pi}{6}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{7\pi}{6}<x<\frac{3\pi}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad x\in\left]\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right[
\end{aligned}$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. Par 2π-périodicité du cosinus, on en déduit que

$$2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}<0 \quad\Leftrightarrow\quad \exists k\in\mathbb{Z},\ x\in\left]\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right[$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\tfrac{7\pi}{6}+2k\pi,\tfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right[}$$

d) $-\frac{1}{2}<\sin(2x)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$

Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $2x\in[0,2\pi]$, c'est-à-dire soit $x\in[0,\pi]$. Par lecture graphique, on obtient que,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}<\sin(2x)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad 0\leqslant 2x\leqslant\frac{\pi}{3} \quad\text{ou}\quad \frac{2\pi}{3}\leqslant 2x<\frac{7\pi}{6} \quad\text{ou}\quad \frac{11\pi}{6}<2x\leqslant 2\pi\\
&\Leftrightarrow \quad 0<x\leqslant\frac{\pi}{6} \quad\text{ou}\quad \frac{\pi}{3}\leqslant x<\frac{7\pi}{12} \quad\text{ou}\quad \frac{11\pi}{12}<x\leqslant\pi\\
&\Leftrightarrow \quad x\in\left]-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{12}\right[\cup\left]\frac{11\pi}{12},\pi\right]
\end{aligned}$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. Par 2π-périodicité du cosinus, on en déduit que

$$-\frac{1}{2}<\sin(2x)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\ x\in\left]-\frac{\pi}{12}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{7\pi}{12}+2k\pi\right[\cup\left]\frac{11\pi}{12}+2k\pi,\pi+2k\pi\right]$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left]-\tfrac{\pi}{12}+k\pi,\tfrac{\pi}{6}+k\pi\right]\cup\left[\tfrac{\pi}{3}+k\pi,\tfrac{7\pi}{12}+k\pi\right[\cup\left]\tfrac{11\pi}{12}+2k\pi,\pi+2k\pi\right]\right)}$$

Exercice 12 – (In)Équations trigonométriques plus complexes. Résoudre les équations et les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. *On pourra faire apparaître des équations de second degré.*

a) $2\cos^2(x) + 5\cos(x) - 3 = 0$

En posant, pour $x \in \mathbb{R}$, $X = \cos(x) \in [-1,1]$, on se ramène à une équation de second degré de la forme :

$$2X^2 + 5X - 3 = 0$$

Après étude du discriminant, cette équation admet deux solutions

$$X_1 = -3 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{1}{2}$$

Or, on ne doit sélectionner que les solutions entre $[-1,1]$, donc nécessairement,

$$X = \frac{1}{2}$$

soit

$$\cos(x) = \frac{1}{2}$$

soit

$$\boxed{x \equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]}$$

b) $\cos^2(x) - \cos(x) - 12 = 0$

En posant, pour $x \in \mathbb{R}$, $X = \cos(x) \in [-1,1]$, on se ramène à une équation de second degré de la forme :

$$X^2 - X - 12 = 0$$

Après étude du discriminant, cette équation admet deux solutions

$$X_1 = -3 \qquad \text{et} \qquad X_2 = 4$$

Or, on ne doit sélectionner que les solutions entre $[-1,1]$, donc l'équation n'admet $\boxed{\text{pas de solution.}}$

c) $2\cos^2(2x) - 3\cos(2x) + 1 < 0$

Cela revient à résoudre l'inéquation $2X^2 - 3x + 1 < 0$ avec comme inconnue $X \in [-1,1]$.
On peut tracer le tableau de signe du polynôme $P : X \mapsto 2X^2 - 3X + 1$.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que

$$X \in \left]-1, \frac{1}{2}\right[$$

c'est-à-dire

$$\cos(2x) \in \left]-1, \frac{1}{2}\right[$$

c'est-à-dire

$$2x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right[$$

et donc,

$$\boxed{x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right[}$$

Exercice 13 – Un peu de physique. On considère un circuit électrique où l'intensité i en fonction du temps t est donnée par,

$$\forall t \geqslant 0,\ \ i(t) = I\cos(\omega t)$$

avec I et ω deux réels, et la tension est un signal sinusoïdal de la forme

$$\forall t \geqslant 0,\ \ e(t) = RI(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))$$

avec R un réel. Montrer que la tension est déphasée de $-\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'intensité.

On a, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\boxed{e(t)} &= RI[\cos(\omega t) + \sin(\omega t)] \\
&= \sqrt{2}RI[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\omega t)] \\
&= \sqrt{2}RI[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\omega t) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(\omega t)] \\
&\boxed{= \sqrt{2}RI\cos\left(\omega t - \tfrac{\pi}{4}\right)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La tension est donc déphasée de } -\frac{\pi}{4} \text{ par rapport à l'intensité.}}$

Exercice 14 – Préambule Maths C 2022.

1. Rappeler le domaine de définition de la fonction tangente, puis donner, sans démonstration, sa parité et sa dérivée, ainsi que, pour sa restriction à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ses variations (on demande le tableau de variations, où apparaîtront les limites aux bornes).

   Extrait du rapport de jury. « *Les correcteurs ont noté beaucoup d'erreurs sur le domaine de définition de la fonction tangente : «*$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$*», « $\mathbb{R}$ », ou encore «$\mathbb{R}\backslash\{k\pi,\pi\in\mathbb{N}\}$ », voire « $\mathbb{R}\backslash\{k\pi,\pi\in\mathbb{R}\}$ » sont souvent proposés. Il semble aussi que certains candidats confondent le domaine d'arrivée ($\mathbb{R}$), et celui de départ. Attention à l'orthographe de tangente qui n'est pas « tangeante ». Enfin dire que «*$\tan(-x)=-\tan(x)$*» ne suffit pas : il faut conclure en disant que la fonction est impaire. Par ailleurs, une fonction n'est jamais « impair ».* »

   - La fonction tangente est définie sur l'ensemble

   $$\boxed{\mathscr{D}_{\tan}=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k \qquad \text{avec } \forall k\in\mathbb{Z},\ \ I_k=\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[}$$

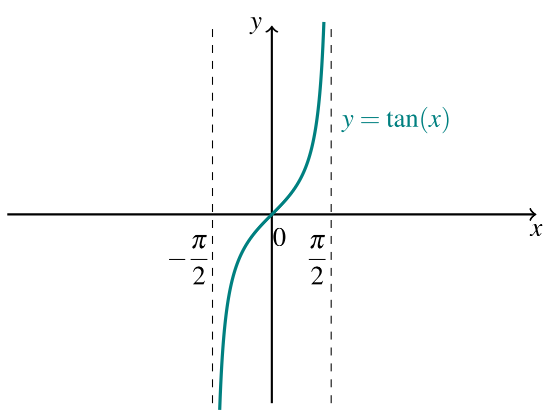
   - La fonction tangente est $\boxed{\text{impaire}}$ sur son ensemble de définition.
   - La fonction tangente est dérivable sur chacun des intervalles I_k, pour $k\in\mathbb{Z}$, et

   $$\boxed{\forall x\in I_k, \qquad \tan'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)}$$

   (Attention, subtilité ! On ne peut pas parler de dérivabilité directement sur l'ensemble $\mathscr{D}_{\tan}$ car ce n'est pas un intervalle...) En particulier, la fonction tangente est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ car sa dérivée y est strictement positive. D'où le tableau de variations suivant.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$		$+$	
$\tan$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Tracer la courbe représentative de la fonction tangente sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.



3. Exprimer, pour tout réel t de $]0,\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\pi[$, la quantité $1+\frac{1}{\tan^2(t)}$ en fonction uniquement de $\sin^2(t)$.

   Soit $t\in]0,\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\pi[$. On a,

$$\boxed{1+\frac{1}{\tan^2(t)}}=1+\frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)}=\frac{\sin^2(t)+\cos^2(t)}{\sin^2(t)}\boxed{=\frac{1}{\sin^2(t)}}$$

Exercice 15 – Préambule Maths C 2019. Pour une correction détaillée, aller voir la question de 1 de l'exercice 7....

1. Pour tout réel t de $[0, \frac{\pi}{2}]$, exprimer $\cos t$ en fonction de $\cos \frac{t}{2}$.

   Extrait du rapport de jury. « *Cette question a été traitée par la majorité des candidats.* »

   Pour tout réel t de $[0, \frac{\pi}{2}]$,
   $$\boxed{\cos(t) = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1}$$

2. Pour tout réel t de $[0, \frac{\pi}{2}]$, comparer $\frac{1}{1+\tan^2 \frac{t}{2}}$ et $\cos^2 \frac{t}{2}$.

   Extrait du rapport de jury. « *Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Toutefois, certains utilisent des méthodes excessivement et inutilement compliquées (études de fonctions notamment, quand ils ne croient pas prouver l'égalité en dérivant les deux fonctions mais, pour obtenir l'égalité des deux dérivées, ils utilisent l'égalité initiale devant être démontrée, c'est une entourloupe ou, au mieux, une erreur logique). D'autres établissent une inégalité entre les quantités. Ce n'est pas faux... mais pas suffisant.* »

   Pour tout réel t de $[0, \frac{\pi}{2}]$,
   $$\boxed{\frac{1}{1+\tan^2 \frac{t}{2}} = \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

3. Pour tout réel t de $[0, \frac{\pi}{2}]$, on pose
   $$u = \tan \frac{t}{2}$$
   On demande d'exprimer $\cos t$ en fonction de u.

   Extrait du rapport de jury. « *Cette question a été traitée par une grande partie des candidats. Le jury rappelle que les calculs doivent être menés jusqu'au bout, et que ce n'est pas au correcteur de les finir.* »

   Pour tout réel t de $[0, \frac{\pi}{2}]$,
   $$\boxed{\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}}$$

Exercice 16 – Étude de fonctions. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin(2x) - \frac{3}{4}\tan(x)$$

1. Étudier la parité.
2. Vérifier que f est π-périodique.
3. Montrer que f admet un maximum sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et préciser la valeur de ce maximum.
4. Représenter f sur un intervalle de longueur trois périodes.

Exercice 17 – Étude de fonctions. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x) - \cos^2(x)$$

1. Donner l'ensemble de définition D_1 de f.

   La fonction f est définie sur $\boxed{D_1 = \mathbb{R}}$ car la fonction cos l'est.

2. Déterminer le domaine d'étude D_2 sur lequel il suffit d'étudier la fonction f.

   Deux informations.

   - La fonction f est 2π-périodique. En effet,

     $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) - \cos^2(x+2\pi) = \cos(x) - \cos^2(x) = f(x),$$

     par 2π-périodicité de cos. On peut donc étudier la fonction f sur tout intervalle de longueur 2π, par exemple $[0, 2\pi]$ ou $[-\pi, \pi]$.
   - La fonction f est paire. En effet,

     $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = \cos(-x) - \cos^2(-x) = \cos(x) - \cos^2(x) = f(x),$$

     car cos est paire.

   On peut donc étudier la fonction f sur $[0, \pi]$: par parité (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées), on en déduira les propriétés sur $[-\pi, \pi]$, puis par périodicité sur $\mathbb{R}$ « en répétant le motif. » Donc $\boxed{D_2 = [0, \pi].}$

3. Dresser un tableau de variations de la fonction f sur D_2.

   La fonction f est dérivable sur D_2 car cos l'est et

   $$\forall x \in D_2, \qquad f'(x) = -\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = \sin(x)(-1 + 2\cos(x)).$$

   Or,

   $$\forall x \in [0, \pi], \qquad \sin(x) \geq 0$$

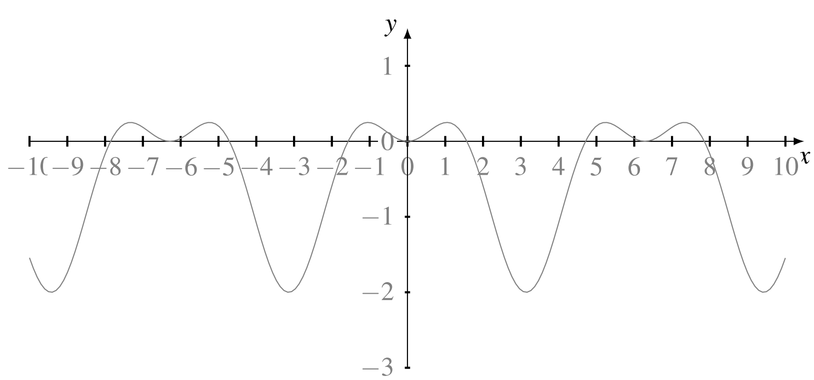
   De plus, pour $x \in [0, \pi]$, on a,

   $$-1 + 2\cos(x) \geq 0 \iff \cos(x) \geq \frac{1}{2} \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

   On obtient donc le tableau de variations suivant.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	-2

4. En déduire la représentation graphique de la fonction f sur D_1.



Exercice 18 – Étude de fonctions. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(3x)\cos^3(x)$$

1. Déterminer la parité de f.

   On peut montrer que la fonction f est $\boxed{\text{paire}}$ en s'appuyant sur la parité de la fonction cosinus.

2. Montrer que f est π-périodique.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}
f(x+\pi) &= \cos(3(x+\pi))\cos^3(x+\pi) \\
&= \cos(3x+3\pi)\cos^3(x+\pi) \\
&= \cos(3x+\pi)\cos^3(x+\pi) && \text{car cos est } 2\pi\text{-périodique} \\
&= -\cos(3x)(-\cos(x))^3 && \text{par propriété de symétrie du cosinus} \\
&= -\cos(3x) \times -\cos^3(x) \\
&= \cos(3x)\cos^3(x) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

   Donc la fonction f est $\boxed{\pi\text{-périodique.}}$

3. Sur quel intervalle I peut-on se contenter d'étudier f ?

   Sur $\boxed{I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right].}$

4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité $f'(x)$ est du signe de $-\sin(4x)$. En déduire le sens de variation de f sur I.

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x)} &= -3\sin(3x)\cos^3(x) + \cos(3x) \times 3 \times -\sin(x) \times \cos^2(x) \\
&= -3\cos^2(x)\left[\sin(3x)\cos(x) + \cos(3x)\sin(x)\right] \\
&= -3\cos^2(x)\sin(3x+x) \\
&\boxed{= -3\cos^2(x)\sin(4x)}
\end{aligned}$$

   Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) \geqslant 0$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $-\sin(4x)$. Or, pour tout $x \in I$,

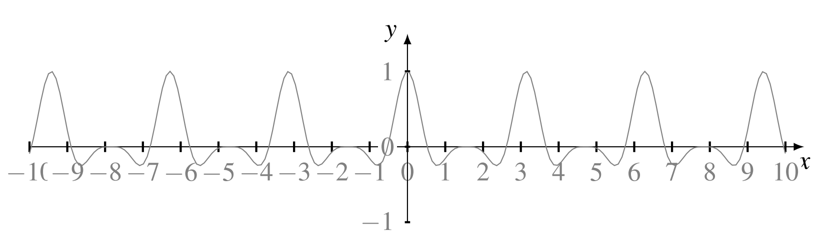
$$\sin(4x) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2}$$

   et

$$\sin(4x) = 0 \iff 0 \leq 4x \leq \pi \iff 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

5. Tracer la représentation graphique de f.



Exercice 19 – Étude de fonctions. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos(x) + \sin(x))$$

1. (a) Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\boxed{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)$$
$$\boxed{= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(x) + \cos(x))}$$

   (b) En déduire que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-x}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

   Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente,

$$\cos(x) + \sin(x) = \frac{2}{\sqrt{2}}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

   Donc

$$\boxed{f(x) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-x}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).}$$

   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \sqrt{2}\mathrm{e}^{-x}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &\iff \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ car } \mathrm{e}^{-x} > 0 \\ &\iff x + \frac{\pi}{4} = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

   L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$ est donc

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

2. (a) Démontrer que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2\mathrm{e}^{-x}\sin(x)$$

   La fonction f est dérivable comme somme et produit de fonctions qui le sont et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x)} = \mathrm{e}^{-x}(-(\cos(x) + \sin(x)) - \sin(x) + \cos(x))$$
$$\boxed{= -2\mathrm{e}^{-x}\sin(x).}$$

   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \sin(x) = 0 \text{ puisque } \mathrm{e}^{-x} \neq 0 \\ &\iff x = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

   L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f'(x) = 0$ est donc

$$\boxed{\mathscr{S} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$$

3. On note I l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$.

   (a) Étudier, le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in I$ et dresser le tableau de variation de f sur I.

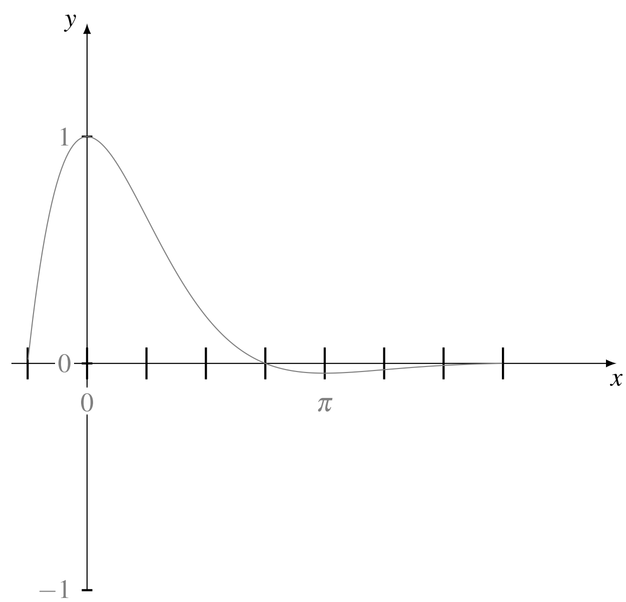
   Soit $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$. On a,

$$\begin{aligned} f'(x) > \iff & -2\mathrm{e}^{-x}\sin(x) > 0 \\ \iff & \sin(x) < 0 \text{ car } -2\mathrm{e}^{-x} < 0 \\ \iff & x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right[\text{ ou } x \in \left]\pi, \frac{7\pi}{4}\right]. \end{aligned}$$

   On en déduit le tableau de signe de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\frac{\pi}{4}$		0		π		$\frac{7\pi}{4}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-\pi}$	$\nearrow$	0

   (b) Tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle I.



Exercice 20 – Soit $x \in]0,\pi[$. On pose,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ P_n(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Montrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ P_n(x) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

Soit $x \in]0,\pi[$. Montrons **par récurrence** que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété

$$\mathscr{P}(n): \qquad \text{«}P_n(x) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\text{»}$$

est vraie.

- *Initialisation.* Montrons que $\mathscr{P}(1)$ est vraie. D'après la **formule de duplication**, on a,

$$\frac{\sin(x)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \cos\left(\frac{x}{2}\right) = P_1(x)$$

  D'où $\mathscr{P}(1)$ vraie.
- *Hérédité.* On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire, on suppose que

$$P_n(x) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

  Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que

$$P_{n+1}(x) = \frac{\sin(x)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$$

  On peut commencer par remarquer que, par définition,

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) \times \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

  Donc, en **utilisant l'hypothèse de récurrence**, on obtient que,

$$P_{n+1}(x) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \times \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

  Or, d'après la **formule de duplication**, on a,

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sin\left(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

  Ainsi, en combinant les deux dernières égalités, on trouve,

$$P_{n+1}(x) = \frac{\sin(x)}{2^n \times 2\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)} \times \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin(x)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.
- *Conclusion.* Ainsi, d'après le procédé de récurrence, on a bien montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ P_n(x) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}}$$

Exercice 21 – À quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$ l'équation $1+\sin^2(\lambda x) = \cos(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une unique solution ?

On va montrer que

$$\boxed{\exists! x \in \mathbb{R}, 1+\sin^2(\lambda x) = \cos(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda \notin \mathbb{Q}}$$

- Sens direct $\boxed{\Rightarrow}$. Par contraposée : on suppose que $\lambda \in \mathbb{Q}$, montrons que l'équation $1+\sin^2(\lambda x) = \cos(x)$ n'admet pas une unique solution.
  - On remarque que $x_0 = 0$ est toujours une solution de l'équation.
  - De plus, comme $\lambda \in \mathbb{Q}$, il existe deux entiers p et q avec $q \neq 0$ tel que $\lambda = \frac{p}{q}$. Alors, on remarque que $x_1 = q\pi$ est aussi une solution de l'équation, différente de x_0 car $q \neq 0$.

  Ainsi, l'équation admet au moins deux solutions.
- Sens indirect $\boxed{\Leftarrow}$. Par contraposée : on suppose que l'équation n'admet pas une unique solution (comme $x_0 = 0$ est toujours une solution, cela signifie que l'on suppose que l'équation admet une solution non nulle, notée x_1) et on montre qu'alors $\lambda \in \mathbb{Q}$. On remarque que

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 1+\sin^2(\lambda x) \geq 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(x) \leq 1$$

  Ainsi, comme x_1 est une solution de l'équation, nécessairement,

  $$1+\sin^2(\lambda x_1) = \cos(x_1) = 1$$

  c'est-à-dire

  $$\sin(\lambda x_1) = 0 \quad \text{et} \quad \cos(x_1) = 1$$

  c'est-à-dire

  $$\exists p \in \mathbb{Z},\ \ \lambda x_1 = p\pi \quad \text{et} \quad \exists q \in \mathbb{Z},\ \ x_1 = q\pi$$

  Comme $x_1 \neq 0$, $q \neq 0$ et donc, on en déduit que,

  $$\lambda = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

Exercice 22 – On admet que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(5x) = 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x).$$

En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

En évaluant la formule donnée en $\frac{\pi}{10}$, on obtient,

$$\cos\left(5 \times \frac{\pi}{10}\right) = 16\cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

c'est-à-dire en notant $x = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$,

$$0 = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

ou encore,

$$x(16x^4 - 20x^2 + 5) = 0$$

c'est-à-dire

$$x = 0 \qquad \text{ou} \qquad 16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$$

Comme $\frac{\pi}{10}$ n'est pas congru à $\pm\frac{\pi}{2}$ modulo 2π, son cosinus ne peut pas être nul. Ainsi, la valeur que l'on cherche est l'une des solutions de l'équation

$$16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$$

Pour résoudre cette équation, on peut poser $X = x^2$ qui est alors solution de

$$16X^2 - 20X + 5 = 0$$

À ce stade, on reconnait une équation du second degré que l'on résout grâce au discriminant. On trouve alors (à détailler) que

$$X = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \qquad \text{ou} \qquad X = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

c'est-à-dire, en revenant à la variable initiale,

$$x^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \qquad \text{ou} \qquad x^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

c'est-à-dire, (comme $2 < \sqrt{5} < 4$ et donc que $5 - \sqrt{5} > 0$),

$$x = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

Il faut comprendre laquelle de ces valeurs correspondant à celle recherchée. Pour cela, on peut remarquer que

$$0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{6} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} < \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) < 1$$

Donc,

$$x = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\cancel{x = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}}_{\text{car valeur négative}} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\cancel{x = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}}_{\text{car valeur négative}}$$

De plus, comme $\sqrt{5} > 2$, on obtient que,

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc, la première valeur est aussi à exclure. Finalement,

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}$$