DM 5

À rendre pour le mardi 6 janvier (facultatif)

Exercice 1 – Montrer que la matrice suivante est inversible et déterminer son inverse par la méthode de votre choix *(on détaillera les calculs effectués et on fera apparaître la vérification à la fin du calcul).*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}.$$

1. (a) Calculer u_0, u_1 et u_2.
   (b) Représenter (sans utiliser le calcul fait à la question précédente) sur le graphe en annexe 1 les termes u_0, u_1 et u_2.
   (c) À partir du graphe, que peut-on conjecturer sur la monotonie et le caractère borné de la suite ?
2. Démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,2]$.
3. Le but de cette question est de démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{\sqrt{2+u_n} + u_n}$$
   On pourra utiliser la relation de récurrence et multiplier par la quantité conjuguée.
   (b) Tracer le tableau de signe du polynôme $x \mapsto -x^2 + x + 2$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
5. Déterminer la valeur de la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$|x+3| + |3x-1| < 4$$

On pourra raisonner par disjonction de cas.

Annexe 1, à rendre avec la copie

Nom Prénom :