DS 3

Samedi 29 novembre, de 8h à 11h

Les règles à respecter sont les suivantes.

① *Aucun document n'est autorisé.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***

② *Les candidat·e·s sont invité·e·s à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible leurs résultats.*

③ *Pour augmenter la* ***lisibilité*** *des calculs, dans la mesure du possible, les égalités successives seront présentées en colonne (et non pas en ligne) avec les différents symboles = bien alignés.*

④ *Les* ***pages*** *doivent être* ***numérotées*** *en indiquant le nombre de pages total (par exemple, 1/12, 2/12, ect.)*

⑤ *L'usage du blanco, souris, effaceurs et stylos frixion interdit : il faut* ***rayer proprement*** *(à la règle) en cas d'erreur.*

Exercice 1 – Questions de cours. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ à l'aide du pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 5y & + & 2z & = & 8 \\ 2x & - & 4y & + & z & = & 5 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 5 \end{array}\right.$$

On demande de faire apparaître sur la copie la ***vérification*** *des résultats.*

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On résout le système linéaire grâce à la **méthode du pivot de Gauss.**

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 5y & + & 2z & = & 8 \\ 2x & - & 4y & + & z & = & 5 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 5 \\ 2x & - & 4y & + & z & = & 5 \\ 3x & - & 5y & + & 2z & = & 8 \end{array}\right. \quad (L_1 \leftrightarrow L_3)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 5 \\ & & & - & 5z & = & -5 \\ & & y & - & 7z & = & -7 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 5 \\ & & y & - & 7z & = & -7 \\ & & & - & 5z & = & -5 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ (L_3 \leftrightarrow L_2) \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 5 \\ & & y & - & 7z & = & -7 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ (L_3 \leftrightarrow L_2) \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 5 \\ & & y & & & = & 0 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ (L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2) \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcl} x & & & = & 2 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ (L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2) \end{array}$$

Ce système linéaire admet donc une $\boxed{\text{unique solution,}}$ donnée par le triplet $\boxed{(2,0,1).}$

Vérification. Le triplet $(2,0,1)$ est bien une solution du système car

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\times 2 & - & 5\times 0 & + & 2\times 1 & = & 8 \quad \checkmark \\ 2\times 2 & - & 4\times 0 & + & 1 & = & 5 \quad \checkmark \\ 2 & - & 2\times 0 & + & 3\times(1) & = & 5 \quad \checkmark \end{array}\right.$$

2. Déterminer les valeurs suivantes en **justifiant** précisément.

a) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

On a,

$$\boxed{\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}}$$

car

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$$

b) $\arcsin(0)$

On a,

$$\boxed{\arcsin(0) = 0}$$

car

$$\sin(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

c) $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

On a,

$$\boxed{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}}$$

car

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{6} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

3. Recopier et compléter le texte suivant donnant la définition de la notion de primitive.

« Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction. On dit que $F : I \to \mathbb{K}$ est $\boxed{\textit{une}}$ *primitive de f sur I si*

① *la fonction F est* $\boxed{\textit{dérivable sur } I}$

② *et* $\boxed{\textit{pour tout } x \in I,\ F'(x) = f(x).}$

4. Dans cette question, on cherche à déterminer une primitive de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x - 2}$$

(a) Trouver les racines éventuelles du polynôme $x \mapsto x^2 + x - 2$ et en déduire sa factorisation.

Le polynôme $x \mapsto x^2 + x - 2$ est un polynôme du second degré. On peut chercher ses racines à l'aide du discriminant qui vaut ici

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$$

Comme $\Delta > 0$, ce polynôme admet deux racines réelles qui valent :

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} = \boxed{1} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2} = \boxed{-2}$$

Ainsi, ce polynôme peut se factoriser de la manière suivante :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)}$$

(b) Déterminer deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1,-2\}, \qquad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

On cherche a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1,-2\}, \qquad \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

- Trouvons la valeur de a. En multipliant l'égalité par la fonction $x \mapsto x-1$, on obtient,

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}, \qquad \frac{1}{x+2} = a + \frac{b(x-1)}{x+2}$$

  Puis, en évaluant l'égalité précédente en $x = 1$, on trouve $\boxed{a = \frac{1}{3}.}$

- De même, on trouve $\boxed{b = -\frac{1}{3}.}$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1,-2\}, \qquad f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{x+2}$$

(c) En déduire une primitive de f sur $]-2,1[$.

D'après la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1,-2\}, \qquad f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{x+2}$$

On en déduit que une primitive F de f sur $]1,+\infty[$ est donnée par

$$\forall x \in]-2,1[, \qquad F(x) = \frac{1}{3}\ln(|x-1|) - \frac{1}{3}\ln(|x+2|)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in]-2,1[, \qquad F(x) = \frac{1}{3}\ln(-x+1) - \frac{1}{3}\ln(x+2)}$$

car, pour tout $x \in]-2,1[$, $x-1 \leq 0$ et $x+2 \geq 0$/

(d) En déduire l'ensemble des primitives de f sur $]-2,1[$.

D'après la question précédente, on connaît une primitive de f sur $]-2,1[$. On en déduit que l'ensemble des primitives de f sur $]-2,1[$ est donné par

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ccc}]-2,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{3}\ln(-x+1) - \frac{1}{3}\ln(x+2) + c \end{array} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}}$$

(e) En déduire la primitive de f sur $]-2,1[$ qui s'annule en 0.

La primitive de f sur $]-2,1[$ qui s'annule en 2 est la fonction F donnée par

$$\boxed{\forall x \in]-2,1[, \qquad F(x) = \frac{1}{3}\ln(-x+1) - \frac{1}{3}\ln(x+2) + \frac{1}{3}\ln(2)}$$

car

- d'après la question précédente, F est bien une primitive de f sur $]-2,1[$,
- et on peut vérifier que $F(0) = 0$.

5. Donner la définition d'une matrice inversible.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. La matrice A est dite **inversible** lorsqu' $\boxed{\text{il existe } B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ telle que $\boxed{AB = I_n}$ ou $BA = I_n$. Dans ce cas,

- la matrice B est unique,
- on a en fait $AB = I_n$ et $BA = I_n$,
- B s'appelle la **matrice inverse** de A, on la note A^{-1}.

Exercice 2 – Sujet de concours : EDHEC 2020 (filière ECE). On convient que, pour tout réel x, on a $x^0 = 1$.
On convient que, pour tout réel x, on a $x^0 = 1$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions

$$x \mapsto \frac{x^n}{(1+x)^2} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$$

sont **continues sur** $[0,1]$ comme quotients de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas (car, pour tout $x \in [0,1]$, $(1+x)^2 \neq 0$ et $1+x \neq 0$). Ce qui justifie $\boxed{\text{l'existence de } I_n \text{ et de } J_n}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) Calculer I_0.

On a

$$\begin{aligned}\boxed{I_0} &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^1 \\ &= \frac{-1}{2}+1 \\ &\boxed{= \tfrac{1}{2}}\end{aligned}$$

(b) Calculer I_1 à l'aide du changement de variable «$t = 1+x$».

- La fonction $t \mapsto \frac{t-1}{t^2}$ est continue sur $[1,2]$.
- La fonction $x \mapsto 1+x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Donc, en effectuant le **changement de variables** «$t = 1+x$», on obtient,

$$\begin{aligned}\boxed{I_1} &= \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \frac{t-1}{t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[\ln(t)+\frac{1}{t}\right]_1^2 \\ &\boxed{= \ln(2)-\tfrac{1}{2}}\end{aligned}$$

3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0,1], \qquad \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2}+\frac{2x^{n+1}}{(1+x)^2}+\frac{x^n}{(1+x)^2} = x^n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$\begin{aligned}\boxed{\forall x \in [0,1], \quad \tfrac{x^{n+2}}{(1+x)^2}+\tfrac{2x^{n+1}}{(1+x)^2}+\tfrac{x^n}{(1+x)^2}} &= \frac{x^{n+2}+2x^{n+1}+x^n}{(1+x)^2} \\ &= \frac{x^n(x^2+2x+1)}{(1+x)^2} \\ &= \frac{x^n(1+x)^2}{(1+x)^2} \\ &\boxed{= x^n}\end{aligned}$$

(b) En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par **linéarité de l'intégrale** et utilisant la relation de la question 3a , on obtient,

$$\begin{aligned}
\boxed{I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n} &= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+2}}{(1+x)^2} + \frac{2x^{n+1}}{(1+x)^2} + \frac{x^n}{(1+x)^2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^n \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\
&\boxed{= \frac{1}{n+1}}
\end{aligned}$$

(c) En déduire la valeur I_2.

En utilisant la relation de la question 3b, on obtient,

$$I_2 + 2I_1 + I_0 = \frac{1}{0+1}$$

autrement dit,

$$I_2 = 1 - 2I_1 - I_0$$

En utilisant les calculs de I_0 et I_1 effectués aux questions 2a et 2b, on obtient,

$$\boxed{I_2} = 1 - 2\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \boxed{= \frac{3}{2} - 2\ln(2)}$$

4. (a) Montrer que,

$$\forall x \in [0,1], \qquad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{(1+x)^2} \leq 1$$

Soit $x \in [0,1]$. On a,

$$\begin{aligned}
& 0 \leqslant x \leqslant 1 \\
\text{donc} \quad & 1 \leqslant 1 + x \leqslant 2 \\
\text{donc} \quad & 1 \leqslant (1+x)^2 \leqslant 4 \qquad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ croissante sur } [0, +\infty[\\
\text{donc} \quad & \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{(1+x)^2} \leqslant 1
\end{aligned}$$

(b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0,1]$. D'après la question précédente, on a,

$$\begin{aligned}
& 0 \leqslant \frac{1}{(1+x)^2} \leqslant 1 \\
\text{donc} \quad & 0 \leqslant \frac{x^n}{(1+x)^2} \leqslant x^n \qquad \text{car } x^n \geqslant 0
\end{aligned}$$

Finalement, on a montré que

$$\forall x \in [0,1], \qquad 0 \leqslant \frac{x^n}{(1+x)^2} \leqslant x^n$$

Donc, par **croissance de l'intégrale**,

$$\int_0^1 0 \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$$

c'est-à-dire, après calcul des deux intégrales aux extrémités (l'intégrale de droite ayant déjà été calculée à la question 3b par exemple),

$$\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}}$$

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n = n \times J_{n-1} - \frac{1}{2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a,

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} \mathrm{d}x$$

Posons, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x^n & \qquad & u'(x) & = & nx^{n-1} \\ v'(x) & = & \frac{1}{(1+x)^2} & & v(x) & = & -\frac{1}{1+x} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur le segment $[0,1]$. Donc par **intégrations par parties**, on a

$$\begin{aligned} \boxed{I_n} &= \left[\frac{-x^n}{1+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{-1}{2} + n \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} \mathrm{d}x \\ &\boxed{= -\frac{1}{2} + nJ_{n-1}} \end{aligned}$$

6. (a) Calculer J_0.

On a,

$$\begin{aligned} \boxed{J_0} &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \Big[\ln(|1+x|)\Big]_0^1 \\ &\boxed{= \ln(2)} \end{aligned}$$

(b) Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad J_n + J_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \boxed{J_n + J_{n+1}} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \\ &\boxed{= \frac{1}{n+1}} \end{aligned}$$

(c) En déduire la valeur de J_1.

Grâce à la relation de la question 6b, on obtient que,

$$J_0 + J_1 = \frac{1}{0+1}$$

autrement dit,

$$J_1 = 1 - J_0$$

Donc, en utilisant le calcul de l'intégrale J_0 fait à la question , on obtient

$$\boxed{J_1 = 1 - \ln(2)}$$

7. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$

Démontrons **par récurrence** que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}_n: \qquad «J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)»$$

est vraie.

- Initialisation. Montrons que $\mathcal{P}_1$ est vraie. D'une part, d'après la question 6c,

$$J_1 = 1 - \ln(2)$$

D'autre part,

$$(-1)^1 \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = -(\ln(2) - 1) = 1 - \ln(2)$$

Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

- Hérédité. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ c'est-à-dire que

$$J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$

Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que

$$J_{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$

On a,

$$\begin{aligned}
J_{n+1} &= -J_n + \frac{1}{n+1} \quad \text{d'après la question 7b} \\
&= -(-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) + \frac{1}{n+1} \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) + \frac{1}{n+1} \\
&= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{(-1)^n}{n+1} \right) \\
&= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion. Par principe de récurrence, on a démontré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)}$$

Exercice 3 – Sujet de concours : ECRICOME 2024 (filière ECE). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la matrice carrée de taille $n \times n$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0, et dont tous les autres coefficients sont égaux à 1 :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note I_n la matrice identité d'ordre n.

Partie 1 - Étude du cas $n = 3$

Dans cette question, on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $(M + I_3)^2 = 3(M + I_3)$.

Tout d'abord, on peut calculer que :

$$M + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis, en effectuant le produit matriciel, on obtient,

$$(M + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3(M + I_3)$$

Finalement, on a montré que

$$\boxed{(M + I_3)^2 = 3(M + I_3)}$$

2. Développer les expressions littérales $(M + I_3)^2$ et $3(M + I_3)$.

En développant l'expression, on obtient directement que

$$\begin{aligned} \boxed{(M + I_3)^2} &= (M + I_3)(M + I_3) \\ &= M \cdot M + M \cdot I_3 + I_3 \cdot M + I_3 \cdot I_3 \\ &\boxed{= M^2 + 2M + I_3} \end{aligned}$$

De même, on obtient directement que,

$$\boxed{3(M + I_3) = 3M + 3I_3}$$

3. En déduire que

$$M^2 - M - 2I_3 = O_3.$$

D'après la question 1, on a,

$$(M + I_3)^2 = 3(M + I_3),$$

c'est-à-dire, *en utilisant la question 2*,

$$M^2 + 2M + I_3 = 3M + 3I_3$$

c'est-à-dire

$$\boxed{M^2 - M - 2I_3 = 0_3}$$

4. En déduire que la matrice M est inversible et déterminer son inverse.

   En partant de la relation *obtenue à la question 3*, on a

$$\begin{aligned} M^2 - M - 2I_3 = 0_3 \quad &\text{donc} \quad M^2 - M = 2I_3 \\ &\text{donc} \quad M(M - I_3) = 2I_3 \\ &\text{donc} \quad M \times \left[\frac{1}{2}(M - I_3)\right] = I_3 \end{aligned}$$

   Ainsi,

$$\text{il existe une matrice} \quad B = \frac{1}{2}(M - I_3) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{telle que} \quad MB = I_3.$$

   Donc, la matrice M est inversible et son inverse est donné par

$$M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I_3)$$

   En faisant le calcul, on obtient que,

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

   Vérification (à faire au brouillon, pas sur la copie).

$$M \cdot M^{-1} = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad \checkmark$$

Dans les questions qui suivent, on considère les matrices P et Q données par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Montrer que la matrice P est inversible et que $P^{-1} = Q$.

   En effectuant le produit matriciel, on peut remarquer que

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I_3$$

   Donc, la matrice P est inversible et son inverse vaut $P^{-1} = Q$.

6. On pose $D = P^{-1}MP$. Calculer la matrice D et montrer que D est une matrice diagonale.

   En effectuant le calcul matriciel, on obtient,

$$\begin{aligned} \boxed{D} &= P^{-1}MP \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\boxed{= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

7. Justifier précisément que $M = PDP^{-1}$.

Par définition de la matrice D, on a
$$D = P^{-1}MP$$
En multipliant à gauche des deux côtés de cette égalité par la matrice P, on obtient
$$PD = PP^{-1}MP$$
Or, par définition de l'inverse $PP^{-1} = I_3$. Donc, on obtient,
$$PD = I_3MP$$
c'est-à-dire
$$PD = MP.$$
De même, en multipliant à droite des deux côtés de cette égalité par la matrice P^{-1}, on obtient
$$\boxed{PDP^{-1} = M}$$

8. Montrer par récurrence que,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad M^k = PD^kP^{-1}$$

Raisonnons par **récurrence**. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$: " $M^k = PD^kP^{-1}$ "

- *Initialisation.* Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  D'une part, $M^0 = I_3$ (par convention).
  D'autre part, $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.
  Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.*
  Supposons que la propriété $\mathcal{P}(k)$ soit vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire supposons que
  $$M^k = PD^kP^{-1}$$
  Montrons que la propriété $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que
  $$M^{k+1} = PD^{k+1}P^{-1}$$
  On a
  $$\begin{aligned} M^{k+1} &= M^k \times M \\ &= PD^kP^{-1}M && \text{par hyp de récurrence} \\ &= PD^kP^{-1}PDP^{-1} && \text{cf question 7} \\ &= PD^kDP^{-1} \\ &= PD^{k+1}P^{-1} \end{aligned}$$
  Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* Donc, par principe de récurrence, on a montré que
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad M^k = PD^kP^{-1}}$$

9. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de D^k.

La matrice D étant diagonale (*cf question 6*), on peut montrer par une **récurrence** immédiate que
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}}$$

10. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de M^k.

Soit $k \in \mathbb{N}$. *En utilisant les questions 8 et 9* et en effectuant le produit matriciel, on obtient que

$$\begin{aligned}
\boxed{M^k} &= PD^kP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^k & (-1)^k & 2^k \\ (-1)^{k+1} & 0 & 2^k \\ 0 & (-1)^{k+1} & 2^k \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\boxed{= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^k + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k \\ (-1)^{k+1} + 2^k & -2(-1)^{k+1} + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k \\ (-1)^{k+1} + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k & -2(-1)^{k+1} + 2^k \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

Vérification (à faire au brouillon, pas sur la copie). Pour $k = 0$, on obtient,

$$M^0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I_3 \quad \checkmark$$

On peut aussi vérifier que pour $k = 1$, on retombe bien sur l'expression de la matrice M.

11. On admet qu'il existe, pour tout $k \in \mathbb{N}$, deux réels a_k et b_k tels que

$$M^k = a_k M + b_k I_3.$$

Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de a_k et b_k.

Soit $k \in \mathbb{N}$. D'une part, *en utilisant la question 10*, on a

$$M^k = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^k + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k \\ (-1)^{k+1} + 2^k & -2(-1)^{k+1} + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k \\ (-1)^{k+1} + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k & -2(-1)^{k+1} + 2^k \end{pmatrix}$$

D'autre part, en effectuant le calcul, on obtient

$$a_k M + b_k I_3 = \begin{pmatrix} b_k & a_k & a_k \\ a_k & b_k & a_k \\ a_k & a_k & b_k \end{pmatrix}$$

En identifiant les coefficients des deux matrices, l'égalité $M^k = a_k M + b_k I_3$ implique que les coefficients a_k et b_k valent

$$\boxed{a_k = \frac{1}{3}\left((-1)^{k+1} + 2^k\right)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{b_k = \frac{1}{3}\left(2(-1)^k + 2^k\right)}$$

Partie 2 - Cas général : n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2

Soit $n \geq 2$ fixé dans toute cette partie. On considère la matrice $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Calculer J_n^2 et exprimer la matrice obtenue en fonction de J_n.

En effectuant le produit matriciel, on obtient,

$$\boxed{J_n^2} = \begin{pmatrix} n & n & \cdots & n \\ n & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{pmatrix} \boxed{= nJ_n}$$

13. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $(J_n)^k = n^{k-1} J_n$.

Raisonnons par **récurrence**. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$: " $(J_n)^k = n^{k-1} J_n$ "

- *Initialisation.* Montrons que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
  D'une part, $(J_n)^1 = J_n$.
  D'autre part, $n^{1-1} J_n = n^0 J_n = 1 \times J_n = J_n$.
  Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- *Hérédité.*
  Supposons que la propriété $\mathcal{P}(k)$ soit vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire supposons que
  $$(J_n)^k = n^{k-1} J_n$$
  Montrons que la propriété $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que
  $$(J_n)^{k+1} = n^k J_n$$
  On a
  $$\begin{aligned} (J_n)^{k+1} &= (J_n)^k \times J_n \\ &= n^{k-1} J_n \times J_n && \text{par hyp de récurrence} \\ &= n^{k-1} (J_n)^2 \\ &= n^{k-1} \times n J_n && \text{cf question précédente} \\ &= n^k J_n \end{aligned}$$
  Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* Donc, par principe de récurrence, on a montré que
  $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad (J_n)^k = n^{k-1} J_n}$$

14. Exprimer M_n en fonction de I_n et J_n.

On peut remarquer que $\boxed{M_n = J_n - I_n.}$

15. En déduire que, pour tout entier naturel k non nul,
$$(M_n)^k = c_k J_n + (-1)^k I_n$$
où
$$c_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente,
$$(M_n)^k = (J_n - I_n)^k$$
Or les deux matrices J_n et $-I_n$ commutent (on a $J_n(-I_n) = (-I_n)J_n$) donc par la formule

du binôme de Newton, on a,

$$\begin{aligned}
\boxed{M_n^k} &= (J_n - I_n)^k \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} J_n^i (-I_n)^{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} J_n^i \times (-1)^{k-i} I_n \qquad \text{car pour tout } i \in \mathbb{N},\ (-I_n)^{k-i} = (-1)^{k-i} I_n \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} J_n^i \\
&= (-1)^k I_n + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} J_n^i \\
&= (-1)^k I_n + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} n^{i-1} J_n \qquad \text{en utilisant la question 13} \\
&= (-1)^k I_n + \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} n^{i-1} \right) J_n \\
&\boxed{= (-1)^k I_n + c_k J_n}
\end{aligned}$$

avec

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} n^{i-1}$$

16. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}$$

où c_k est le réel défini à la question précédente.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule du binôme de Newton, on a,

$$\begin{aligned}
\boxed{c_k} &= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^i (-1)^{k-i} \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^i (-1)^{k-i} - (-1)^k \right) \\
&\boxed{= \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}}
\end{aligned}$$

17. En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression des coefficients diagonaux et des coefficients non diagonaux de $(M_n)^k$ en fonction de n et de k.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 15, on a,

$$M_n = c_k J_n + (-1)^k I_n = \begin{pmatrix} (-1)^k & c_k & \cdots & c_k \\ c_k & (-1)^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_k \\ c_k & \cdots & c_k & (-1)^k \end{pmatrix}$$

- Ainsi, tous les $\boxed{\text{coefficients diagonaux}}$ de $(M_n)^k$ valent $\boxed{(-1)^k}$
- et tous les $\boxed{\text{coefficients non diagonaux}}$ de $(M_n)^k$ valent

$$\boxed{c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}}$$