COLLES 15 & 16 - *Du 19/01 au 23/01 & du 26/01 au 30/01*

La colle débutera par une question de cours et un exercice de cours (voir page 2).

Chapitre 15 - Lien Systèmes Linéaires & Calcul Matriciel

- Retour sur la notion de système linéaire
- Définition d'un système linéaire compatible
- Notion de système linéaire homogène associé
- Interprétation matricielle d'un système linéaire
- Condition de compatibilité : $AX = B$ ssi B combinaison linéaire de A
- Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire (sol = sol homogène+sol particulière)
- Lien opérations élémentaires sur les lignes/colonnes et matrices de transformation
- Lien entre l'inversibilité d'une matrice et la résolution du système linéaire $AX = B$
- Déterminer de l'inversibilité/de l'inverse grâce au pivot de Gauss

Chapitre 16 - Limite d'une suite

- Définition de convergence vers un réel, vers $\pm\infty$ en terme de quantificateurs
- Limites usuelles (puissances, exponentielle, logarithme, suites géométriques)
- Opérations sur les limites (somme, produit, quotient, composition) avec les quatre formes indéterminées à connaître
- Croissances comparées pour résoudre les formes indéterminées dans certains cas
- Brève introduction aux équivalents et aux petits o
  NOTES POUR LES COLLEURS/COLLEUSES : Ces notions ont été seulement définies (par exemple, aucune discussion sur les opérations autorisées n'a eu lieu). Des exercices simples peuvent être posés mais la théorie complète sera vue ultérieurement.
- Théorèmes d'existence : par encadrement, théorème de la limite monotone
- Notion de suites adjacentes
- Propriétés théoriques sur les suites : passage à la limite dans une inégalité, Suites extraites
- Brève extension aux suites complexes

Questions de cours & exercices de cours

Une question de cours et un exercice du cours seront demandés parmi les suivants. La question de cours sera notée sur cinq points, et de même pour l'exercice de cours, soit un total de **10 points** (sur les 20 au total). *Néanmoins, tout énoncé du cours pourra faire l'objet d'une question de cours, à tout moment de la colle.*

Un énoncé :

- ☐ Donner la caractérisation de l'inversibilité d'une matrice via la résolution du système linéaire $AX = B$ *(Chap 15 - Proposition 2.1*

- ☐ Donner la limite des suites de référence suivantes $(n^a)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (pour $a > 0$ et $a < 0$), $(\exp(an))_{n\in\mathbb{N}}$ (pour $a > 0$) et $(\ln(n)^a)_{n\in\mathbb{N}}$ (pour $a > 0$). *(Chap 16 - Section 2.1.a)*
- ☐ Donner la limite des suites géométriques en fonction de la raison *(Chap 16 - Section 2.1.b)*
- ☐ Savoir énoncer le théorème d'existence d'une limite par encadrement *(Chap 16 - Proposition 3.1)*
- ☐ Savoir énoncer le théorème de la limite monotone et en faire une illustration graphique *(Chap 16 - Proposition 3.9)*

Un exercice :

- ☐ Déterminer si le système suivant est compatible ou non. *(Chap 15 - Exemple 1.3)*

$$\begin{cases} x+2y-3z=7 \\ 2x-5y+z=-4 \\ 3x-3y-2z=1 \end{cases}$$

- ☐ On considère le système linéaire suivant *(Chap 15 - Exemple 2.2)*

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & 10y & + & 2z & = & -3 \end{array}\right.$$

d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

1. Écrire le système linéaire sous la forme $AX = B$ en explicitant chacune des matrices A, X et B.
2. Donner l'ensemble des solutions de ce système en admettant que A est inversible et que son inverse est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & -26 & -4 \\ -1 & -5 & -1 \\ 4 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

- ☐ Déterminer l'inversibilité de la matrice suivante *(On ne demande pas de donner l'inverse) (Chap 15 - Exemple 2.9)*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- ☐ Déterminer la limite de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par *(Chap 16 - Exemple 2.1)*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2^n - 3^n}{3^n - 5^n}$$

- ☐ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \leqslant u_n \leqslant 2n.$$

Montrer que la suite $\left(\frac{\ln(u_n)}{\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$ admet une limite finie et la déterminer. *(Chap 16 - Exemple 3.2*

- ☐ On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, *(Chap 16 - Exemple 3.10 (début))*

$$u_0 = -3 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$.