

# 17. Notion d'Ensemble

## 1 Notion d'ensemble

### 1.1 Mode de définition d'un ensemble

#### Définition 1.1

- Un **ensemble**  $E$  est une collection d'objets (non répétés et non ordonnés), appelés **éléments** de  $E$ .
- Si  $x$  est un élément de l'ensemble  $E$ , on dit que  $x$  **appartient** à  $E$ , et on note  $x \in E$ .
- Si  $x$  n'est pas un élément de l'ensemble  $E$ , on dit que  $x$  **n'appartient pas** à  $E$ , et on note  $x \notin E$ .

Ensemble	$\dots \in \dots$	$\dots \notin \dots$
$\mathbb{R}$	$1 \in \mathbb{R}$	$i \notin \mathbb{R}$ (nombre complexe)
$\mathbb{Z}$	$-2 \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
$\mathbb{N}$	$4 \in \mathbb{N}$	$-1 \notin \mathbb{N}$
$\mathbb{R}^*$	$\sqrt{2} \in \mathbb{R}^*$	$0 \notin \mathbb{R}^*$
$[0, 1]$	$\frac{1}{3} \in [0, 1]$	$10 \notin [0, 1]$
$\mathbb{R}[x]$	$x \mapsto x^3 + 1 \in \mathbb{R}[x]$	$x \mapsto \ln(x) \notin \mathbb{R}[x]$
$\mathbb{R}_2[x]$	$x \mapsto x^2 + 1 \in \mathbb{R}_2[x]$	$x \mapsto x^4 \notin \mathbb{R}_2[x]$
$GL_2(\mathbb{R})$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin GL_2(\mathbb{R})$

#### Modes de définition d'un ensemble.

- Pour définir un ensemble, on peut tout simplement faire la **liste** de ces éléments. Par exemple, si on note

$$E = \{1, 2, 3\}$$

alors  $E$  est l'ensemble constitué des éléments 1, 2 et 3. De la même manière, si on note

$$\text{PTSI} = \{\text{Mayoé, Mahé, \dots, Emma}\}$$

alors PTSI est l'ensemble constitué de tous les élèves de la classe.



Les éléments d'un ensemble sont donnés "en vrac" (il n'y a pas de notion d'ordre). Par exemple, les deux ensembles suivants sont égaux :

$$\{1, 3\} = \{3, 1\}$$

Par convention, chaque élément est généralement énumérée une seule fois :

$$\{1, 2, 1, 3, 2\} = \{1, 2, 3\}$$

- Quand les ensembles comportent beaucoup d'éléments (parfois même une infinité...), il est trop long de tous les lister. Pour avoir une notation compacte d'un ensemble, on peut utiliser les deux autres modes de définition suivant.

Forme <b>conditionnelle</b> avec une propriété $\mathcal{P}$	Forme <b>paramétrique</b> avec un paramètre
$F = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$	$G = \{f(x) \mid x \in I\}$
$F$ est l'ensemble des éléments de $E$ qui vérifient la propriété $\mathcal{P}$	$G$ est l'ensemble des éléments de $E$ qui s'écrivent $f(x)$ avec $x \in I$ .
$x \in F \Leftrightarrow \mathcal{P}(x)$ est vraie	$y \in G \Leftrightarrow$ il existe $x \in I$ tel que $y = f(x)$



Un même ensemble peut être défini de deux manières différentes. Par exemple,

$$\{0, 1\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = n\}$$

**Exemple 1.2**

Ensemble	Éléments	$\dots \notin \dots$
$E = \{\text{élève} \in \text{PTSI} \mid \text{élève fait allemand}\}$	Alice, Rémi,	Ulysse $\notin E$
$E = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$	$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$	$-1 \notin E$
$E = \llbracket 1, 5 \rrbracket = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq 5\}$	1, 2, 3, 4, 5	6 $\notin E$
$E = \{\text{fonction } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est paire}\}$	$x \mapsto x^2, x \mapsto \frac{1}{x^4+1}, \dots$	$x \mapsto x^3 \notin E$
$E = \{\text{fonction } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f' = 0\}$	$x \mapsto 1, x \mapsto 2, \dots$	$x \mapsto x \notin E$
$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$	$(0, 1), (-1, 1), (\sqrt{2}, \frac{1}{3}), \dots$	$1 \notin \mathbb{R}^2$
$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$	$(-1, 1), (2, -2), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \dots$	$(0, 1) \notin E$
$E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 0\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \dots$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin E$
$E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est arithmétique}\}$	$(2n+1)_{n \in \mathbb{N}}, (n-1)_{n \in \mathbb{N}}, \dots$	$(2^n)_{n \in \mathbb{N}} \notin E$
$E = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$	0, 1, 4, 9, ...	$-1 \notin E$
$E = \{(t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$	$(-1, 1), (2, -2), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \dots$	$(0, 1) \notin E$
$E = \{(t, t^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$	$(1, 1), (2, 4), (\sqrt{2}, 2), \dots$	$(0, 1) \notin E$

**Exemple 1.3** On considère les deux ensembles  $E_1$  et  $E_2$  suivants :

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{(a, a+1) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que  $(4, -3) \in E_1$  mais que  $(2, 2) \notin E_1$ .
2. Montrer que  $(2, 3) \in E_2$  mais que  $(2, 4) \notin E_2$ .

**↗ Gestes Invisibles/Automatismes.** L'ensemble  $E_1$  est donné sous forme conditionnelle (appartenance ssi condition vérifiée) tandis que l'ensemble  $E_2$  est donné sous forme paramétrique (appartenance ssi existence d'un paramètre).

1. Le couple  $(4, -3) \in E_1$  car

$$4 + (-3) = 1 \quad (\text{condition vérifiée})$$

Le couple  $(2, 2) \notin E_1$  car

$$2 + 2 \neq 1 \quad (\text{condition non vérifiée})$$

2. Le couple  $(2, 3) \in E_2$  car

$$\text{il existe un paramètre } a = 2 \in \mathbb{R} \text{ tel que } (2, 3) = (a, a+1) \quad (\text{existence paramètre})$$

Montrons que  $(2, 4) \notin E_2$ . On va raisonner *par l'absurde*. Supposons que  $(2, 4) \in E_2$ . Alors,

$$\text{il existe un paramètre } a \in \mathbb{R} \text{ tel que } (2, 4) = (a, a+1)$$

Donc,  $a = 2$  et  $a + 1 = 4$ . On obtient alors  $a = 2 = 3$ . Ceci est absurde. Donc  $(2, 4) \notin E_2$ .

**Exemple 1.4** Remplacer les ... par le symbole adéquat entre  $\in$  et  $\notin$  et justifier l'assertion que l'on obtient.

Appartenance ou pas	Justification
$1 \in \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$	car $-1 \leq 1 \leq 1$
$2 \notin \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$	car $2 > 1$
$(2, 3) \notin \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$	car $3 \neq 2^2$
$(4, 2) \notin \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2x = 0\}$	car $2 - 2 \times 4 \neq 0$
$(1, 1, -1) \in \{(t, t, -t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$	car il existe $t = 1 \in \mathbb{R}$ tel que $(1, 1, -1) = (t, t, -t)$
$(2, \sqrt{2}, 4) \in \{(t, \sqrt{t}, t^2) \in \mathbb{R}^3 \mid t \geq 0\}$	car il existe $t = 2 \geq 0$ tel que $(2, \sqrt{2}, 4) = (t, \sqrt{t}, t^2)$
$x \mapsto x^2 + 2x + 1 \in E_1 = \{P^2 \mid P \in \mathbb{R}_1[x]\}$	car il existe $P : x \mapsto x + 1 \in \mathbb{R}_1[x]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 1 = P(x)^2$
$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \in E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ 2a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$	car il existe $a = 4 \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a \\ 2a & a \end{pmatrix}$
$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \notin E_2$	car (raisonnement par l'absurde**)

\*\*Montrons que  $M \notin E_2$ . Raisonnons par l'absurde. On suppose que  $M \in E_2$ . Alors,

$$\text{il existe un paramètre } a \in \mathbb{R} \text{ tel que } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a \\ 2a & a \end{pmatrix}$$

En identifiant les coefficients, on obtient,

$$\begin{cases} a = 1 \\ -a = 2 \\ 2a = -3 \\ a = 6 \end{cases}$$

Ce qui est absurde. Donc  $M \notin E_2$ .

**Définition 1.5 — Ensembles particuliers.**

- L'ensemble ne contenant aucun élément est appelé l'**ensemble vide**, et est noté  $\emptyset$ .
- Un ensemble ne contenant qu'un seul élément est appelé un **singleton**, et est noté  $\{x\}$  lorsque  $x$  est l'unique élément de cet ensemble.

**Exemple 1.6** Pour chacun des ensembles suivants, trouver une équation dont il est l'ensemble des solutions réelles.

a)  $\{1\}$

L'équation  $x - 1 = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$

b)  $\emptyset$

L'équation  $x^2 + 1 = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$

c)  $\{2, 3\}$

L'équation  $(x - 2)(x - 3) = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$

## 1.2 Inclusion d'ensembles

### Définition 1.7

- On dit qu'un ensemble  $F$  est **inclus** dans un autre ensemble  $E$  (ou  $F$  est un **sous-ensemble** de  $E$  ou bien encore  $F$  est une **partie** de  $E$ ) si tout élément de  $F$  appartient à  $E$  :

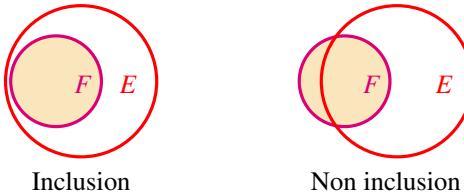
pour tout  $x \in F$ ,  $x \in E$ .

On note alors  $F \subset E$ .

- On dit qu'un ensemble  $F$  n'est pas inclus dans  $E$  s'il existe un élément  $x \in F$  tel que  $x \notin E$  :

il existe  $x \in F$ ,  $x \notin E$ .

On note alors  $F \not\subset E$ .



**Exemple 1.8** Remplacer les ... par le symbole adéquat entre  $\subset$  et  $\not\subset$ .

Inclusion ou pas	Inclusion ou pas
$\{0\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$	$\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ paire}\} \not\subset \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ impaire}\}$
$\{0, 4\} \not\subset \{0, 1, 2, 3\}$	$\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ cte}\} \subset \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ arith.}\}$
$[0, 1] \subset \mathbb{R}$	$\{(a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$
$[-1, 1] \not\subset [2, 3]$	$\{(a, 1 - a) \mid a \in \mathbb{R}\} \not\subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\}$
$[0, 1] \not\subset [0, 1[$	$\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 0\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
$\mathbb{R}_3[x] \not\subset \mathbb{R}_2[x]$	$\{P^2 \mid P \in \mathbb{R}_1[x]\} \not\subset \mathbb{R}_1[x]$
$\mathbb{R}_1[x] \subset \mathbb{R}_2[x]$	$\{P^2 \mid P \in \mathbb{R}_1[x]\} \subset \mathbb{R}_2[x]$

Il ne faut pas confondre l'appartenance  $\in$  (élément appartenant à un ensemble) et l'inclusion (ensemble inclus dans un autre ensemble).

**Exemple 1.9** Rayer les assertions mathématiques qui n'ont pas de sens.

$2 \in \{2, 4, 5\}$	$\underline{2 \subset \{2, 4, 5\}}$
$\underline{\{2\} \in \{2, 4, 5\}}$	$\{2\} \subset \{2, 4, 5\}$

**Exemple 1.10** Compléter les phrases avec les symboles  $\in$ ,  $\notin$ ,  $\subset$ ,  $\not\subset$  afin que les phrases mathématiques soient vraies par rapport au schéma donné.

a)  $x \in E$

b)  $E \subset F$

c)  $x \in F$

d)  $F \not\subset E$

e)  $\{x\} \subset E$

f)  $y \in F$

g)  $y \notin E$

h)  $\{y\} \not\subset E$



**Proposition 1.11 — Transitivité de l'inclusion.** Soient  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois ensembles. Alors,

Si  $E \subset F$  et  $F \subset G$  alors  $E \subset G$ .

Interprétation géométrique.

Pour démontrer que  $F$  est inclus dans  $E$ , voici la rédaction habituelle.

Soit  $x \in F$ . Montrons que  $x \in E$ .

*\*Insérer raisonnement mathématique\**

Donc  $x \in E$ . D'où  $F \subset E$ .

**Exemple 1.12** Montrons que

$$F = \{3a + 1 \mid a \in [0, 1]\} \subset [1, 4]$$

*Espace ambiant : l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ .*

• Soit  $x \in F$ , c'est-à-dire

il existe un paramètre  $a \in [0, 1]$  tel que  $x = 3a + 1$  (existence paramètre)

• Montrons que  $x \in [1, 4]$ , c'est-à-dire montrons que

$$1 \leq x \leq 4 \quad (\text{condition à vérifier})$$

$$\text{On a} \quad 0 \leq a \leq 1$$

$$\text{Donc} \quad 0 \leq 3a \leq 3$$

$$\text{Donc} \quad 1 \leq 3a + 1 \leq 4$$

$$\text{C-à-d} \quad 1 \leq x \leq 4$$

Donc  $x \in [1, 4]$ . D'où  $F \subset [1, 4]$ .

**Exemple 1.13** Montrons que

$$F = \{x \mapsto x^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset E = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction paire}\}.$$

*Espace ambiant : l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ .*

Soit  $f \in F$ , c'est-à-dire

il existe un paramètre  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{2n}$  (existence paramètre)

Montrons que  $f \in E$ , c'est-à-dire montrons que

$f$  est une fonction paire (condition à vérifier)

Tout d'abord, le domaine de définition de  $f$ , l'ensemble  $\mathbb{R}$ , est symétrique par rapport à 0. Puis, on a,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = f(x)$$

Donc,  $f$  est paire, c'est-à-dire  $f \in E$ . D'où  $F \subset E$ .

**Exemple 1.14** Montrons que

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \subset E = \{(t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

*Espace ambiant* : l'ensemble de couples de nombres réels  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $(x, y) \in F$ , c'est-à-dire

$$x + y = 0 \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que  $(x, y) \in E$ , c'est-à-dire montrons que

$$\text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y) = (t, -t) \quad (\text{existence paramètre})$$

**Brouillon.** On cherche  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $(x, y) = (t, -t)$ . Comme  $y + x = 0$ , on peut remarquer que  $(x, y) = (x, -x)$ . Posons  $t = x \in \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x, -x) && \text{car } x + y = 0 \\ &= (t, -t) && \text{par choix de } t \end{aligned}$$

Donc  $(x, y) \in E$ . D'où  $F \subset E$ .

**Exemple 1.15** Montrons que

$$F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est impaire}\} \subset E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$$

*Espace ambiant* : l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f \in F$ , c'est-à-dire

$$f \text{ est impaire} \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que  $f \in E$ , c'est-à-dire montrons que

$$f(0) = 0 \quad (\text{condition à vérifier})$$

Comme  $f$  est impaire, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x).$$

En particulier, on obtient

$$f(0) = -f(0) \quad \text{c-à-d} \quad 2f(0) = 0 \quad \text{c-à-d} \quad f(0) = 0$$

Donc  $f \in E$ . D'où  $F \subset E$ .

?

Pour démontrer que  $E$  n'est inclus dans  $F$ , voici la rédaction habituelle.

*On cherche un élément  $x \in E$  tel que  $x \notin F$ . Soit  $x = \dots$*

- *D'une part,  $x \in E$  car \*insérer raisonnement\*.*
- *D'autre part,  $x \notin F$  car \*insérer raisonnement\*.*

*Ainsi, on a exhibé un élément  $x \in E$  tel que  $x \notin F$ . D'où  $F \not\subset E$ .*

**Exemple 1.16** Montrer que

$$E = [-1, 1] \not\subset F = \{a^2 \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

*Espace ambiant* : l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ .

On cherche une *nombre réel*  $x$

- qui appartient à  $E$  (c'est-à-dire qui est compris entre  $-1$  et  $1$ )
- mais qui n'appartient pas à  $F$  (c'est-à-dire qui n'est pas le carré d'un nombre réel).

Soit  $x = -1 \in \mathbb{R}$ .

- D'une part,  $x \in E$  (condition vérifiée)

- D'autre part, montrons que  $x \notin F$ . Pour cela, on raisonne *par l'absurde*. Supposons par l'absurde que  $x$  est dans  $F$ . Alors,

$$\text{il existe } a \in \mathbb{R}, -1 = a^2 \quad (\text{existence paramètre})$$

Alors, on aurait que  $-1 = a^2 \geq 0$ . C'est absurde. Donc  $x \notin F$ .

Ainsi, on a exhibé un élément  $x \in E$  tel que  $x \notin F$ . Donc  $E \not\subseteq F$ .

**Exemple 1.17** Montrer que

$$E = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction paire}\} \not\subseteq F = \{x \mapsto x^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

*Espace ambiant* : l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ .

On cherche une *fonction*

- qui appartient à  $E$  (c'est-à-dire qui est paire)
- mais qui n'appartient pas à  $F$  (c'est-à-dire qui n'est pas une fonction puissance d'exposant pair).

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 1$$

- D'une part, la fonction  $f$  est paire, car

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x) \quad (\text{condition vérifiée})$$

Donc  $f \in E$ .

- D'autre part, montrons que  $f \notin F$ . Pour cela, on raisonne *par l'absurde*. Supposons par l'absurde que  $f$  est dans  $F$ . Alors,

$$\text{il existe } n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^{2n} \quad (\text{existence paramètre})$$

Alors, on aurait que  $f(0) = 0 = 1$ . C'est absurde. Donc  $f \notin F$ .

Ainsi, on a exhibé un élément  $f \in E$  tel que  $f \notin F$ . Donc  $E \not\subseteq F$ .

**Exemple 1.18** Montrer que

$$E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid u_0 = 0\} \not\subseteq F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est arithmétique}\}$$

*Espace ambiant* : l'ensemble des suites réelles.

On cherche une *suite*  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- qui appartient à  $E$  (c'est-à-dire dont le premier terme est nul)
- mais qui n'appartient pas à  $F$  (c'est-à-dire qui n'est pas arithmétique).

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n^2$$

- D'une part,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$  car  $u_0 = 0$  (condition vérifiée)
- D'autre part, montrons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin F$ . Pour cela, on raisonne *par l'absurde*. Supposons par l'absurde que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dans  $F$ . Alors,

$$\text{il existe } r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r \quad (\text{existence paramètre})$$

Alors, on aurait que  $r = u_1 - u_0 = 1 = u_2 - u_1 = 3$ . C'est absurde. Donc  $x \notin F$ .

Ainsi, on a exhibé un élément  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$  tel que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin F$ . Donc  $E \not\subseteq F$ .

**Définition 1.19 — Principe de la double inclusion.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles.

$$E = F \iff E \subset F \text{ et } F \subset E.$$

Pour prouver l'égalité de deux ensembles  $E$  et  $F$ , on utilise couramment le raisonnement par *double inclusion* en montrant successivement les deux inclusions :

- $E \subset F$ , c'est-à-dire pour tout  $x \in E$ ,  $x \in F$ .
- $F \subset E$ , c'est-à-dire pour tout  $x \in F$ ,  $x \in E$ .

**Exemple 1.20** Montrer que

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x + 1\} = \{(a + 1, 3a + 4) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

*Espace ambiant* : l'ensemble de couples de nombres réels  $\mathbb{R}^2$ . Notons  $A$  l'ensemble de gauche et  $B$  celui de droite. Montrons l'égalité de ces deux ensembles par *double inclusion*.

- Montrons que  $A \subset B$ .

Soit  $u = (x, y) \in A$ , c'est-à-dire

$$y = 3x + 1 \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que  $u = (x, y) \in B$ , c'est-à-dire montrons que

il existe un paramètre  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $(x, y) = (a + 1, 3a + 4)$  (existence paramètre)

Posons  $a = x - 1 \in \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{cases} x &= a + 1 \\ y &= 3x + 1 = 3(a + 1) + 1 = 3a + 4 \end{cases}$$

Donc

$$u = (x, y) = (a + 1, 3a + 4)$$

Donc  $u \in B$ . D'où  $A \subset B$ .

- Montrons que  $B \subset A$ .

Soit  $u = (x, y) \in B$ , c'est-à-dire

il existe un paramètre  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $(x, y) = (a + 1, 3a + 4)$  (existence paramètre)

Montrons que  $u = (x, y) \in A$ , c'est-à-dire montrons que

$$y = 3x + 1 \quad (\text{condition à vérifier})$$

On a

$$3x + 1 = 3(a + 1) + 1 = 3a + 4 = y$$

Donc  $u = (x, y) \in A$ . D'où  $B \subset A$ .

Pour prouver l'égalité de deux ensembles  $E$  et  $F$ , on peut aussi raisonner par *équivalence*.

On a

$$x \in E \iff (\dots) \iff x \in F$$

Donc  $E = F$ .

**Exemple 1.21** Déterminer l'ensemble  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \exp(x^2) - 2 = 0\}$ .

*Espace ambiant : l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ .*

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned}
 x \in S &\iff \exp(x^2) - 2 = 0 && (\text{condition vérifiée}) \\
 &\iff \exp(x^2) = 2 \\
 &\iff x^2 = \ln(2) \\
 &\iff x = \sqrt{\ln(2)} \text{ ou } x = -\sqrt{\ln(2)} \\
 &\iff x \in \{\sqrt{\ln(2)}, -\sqrt{\ln(2)}\}
 \end{aligned}$$

Donc  $S = \{\sqrt{\ln(2)}, -\sqrt{\ln(2)}\}$ .

### 1.3 L'ensemble des parties d'un ensemble

**Définition 1.22 — Ensemble des parties.** Soit  $E$  un ensemble. On appelle **ensemble des parties de  $E$** , notée  $\mathcal{P}(E)$ , l'ensemble des sous-ensembles de  $E$ , c'est-à-dire l'ensemble des ensembles  $A$  qui sont inclus dans  $E$ . Autrement dit, on a

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E.$$

! L'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  est un ensemble dont les éléments sont... des ensembles ! C'est donc un ensemble d'ensemble. Par exemple, toute partie de  $\mathbb{R}$  apparaît dans  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  comme un élément, comme «un point».

•  $[0, 1]$  •  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$   
•  $\mathbb{Q}$  •  $\{\pi\}$

#### Exemple 1.23

$E$	$\mathcal{P}(E)$
$\{\text{Alice, Bob}\}$	$\{\emptyset, \{\text{Alice}\}, \{\text{Bob}\}, \{\text{Alice, Bob}\}\}$
$\{0, 1\}$	$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$
$\{a, b, c\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

! Puisque  $E \subset E$  et  $\emptyset \subset E$ , on a  $E \in \mathcal{P}(E)$  et  $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ . Donc  $\mathcal{P}(E)$  n'est jamais vide, il contient toujours au moins  $\emptyset$  et  $E$ .

## 2 Opération sur deux parties

### 2.1 Union et intersection

**Définition 2.1 — Union de deux ensembles.** Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . On appelle **union** de  $A$  et  $B$ , notée  $A \cup B$ , l'ensemble des éléments appartenant soit à  $A$ , soit à  $B$ , c'est-à-dire

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Autrement dit, on a

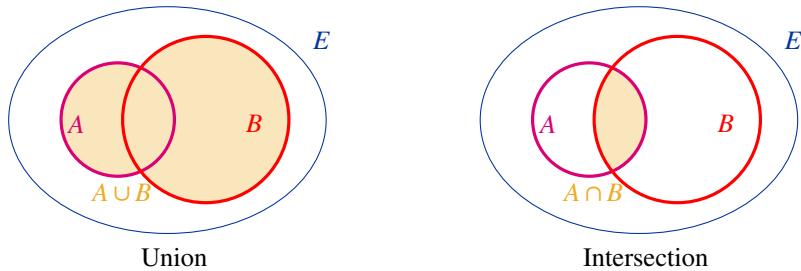
$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B.$$

**Définition 2.2 — Intersection de deux ensembles.** Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . On appelle **intersection** de  $A$  et  $B$ , notée  $A \cap B$ , l'ensemble des éléments appartenant à  $A$  et à  $B$ , c'est-à-dire

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Autrement dit, on a

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B.$$



### Exemple 2.3

Exemples	Opération	Résultats
$\{\text{Alice, Bob}\} \cap \{\text{Bob, Pierre, Paul}\}$	Intersection	$\{\text{Bob}\}$
$\{\text{Alice, Bob}\} \cup \{\text{Bob, Pierre, Paul}\}$	Union	$\{\text{Alice, Bob, Pierre, Paul}\}$
$\{1, 2, 3\} \cap \{-3, 7, 9\}$	Intersection	$\emptyset$
$\{1, 2, 3\} \cup \{-3, 7, 9\}$	Union	$\{-3, 1, 2, 3, 7, 9\}$
$]-\infty, 3] \cup [2, 4]$	Union	$]-\infty, 4]$
$]-1, 1[ \cup [1, 2]$	Union	$]-1, 2[$
$]-1, 1] \cap [0, 1[$	Intersection	$[0, 1[$
$]-1, 0[ \cap [0, 1]$	Intersection	$\emptyset$
$\mathbb{Z} \cap [-\pi, \sqrt{2}]$	Intersection	$\{-3, -2, -1, 0, 1\} = \llbracket -3, 1 \rrbracket$

**Proposition 2.4 — Opérations sur les unions et les intersections.** Soient  $A, B$  et  $C$  des parties de  $E$ . On a les relations suivantes.

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Interprétation géométrique de  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

**Exercice 2.5** Déterminer  $F_1 \cap F_2$  où

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + z = 1\} \quad \text{et} \quad F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 2\}$$

*Espace ambiant : l'ensemble des triplets  $\mathbb{R}^3$*

Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Raisonnons par *équivalence*.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F_1 \cap F_2 &\iff (x, y, z) \in F_1 \text{ et } (x, y, z) \in F_2 \\ &\iff 3x - y + z = 1 \text{ (cond. vérifiée)} \text{ et } x - 2y + z = 2 \text{ (cond. vérifiée)} \\ &\iff \begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

On aboutit à un **système linéaire** que l'on résout par *pivot de Gauss*.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F_1 \cap F_2 &\iff \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\iff \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 5y - 2z = -5 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \end{aligned}$$

Nbre d'inconnues > Nbre d'équations. On choisit deux inconnues principales, par exemple  $x$  et  $y$ , que l'on exprime en fonction de l'inconnue restante.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F_1 \cap F_2 &\iff \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ y = -1 + \frac{2}{5}z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{5}z \\ y = -1 + \frac{2}{5}z \end{cases} \\ &\iff (x, y, z) = \left( -\frac{1}{5}z, -1 + \frac{2}{5}z, z \right) \\ &\iff (x, y, z) \in \left\{ \left( -\frac{1}{5}z, -1 + \frac{2}{5}z, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Donc

$$F_1 \cap F_2 = \left\{ \left( -\frac{1}{5}z, -1 + \frac{2}{5}z, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

**Exercice 2.6** Déterminer  $F_1 \cup F_2$  où

$$F_1 = \{1\} \quad \text{et} \quad F_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 = 0\}$$

*Espace ambiant : l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$*

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Raisonnons par *équivalence*.

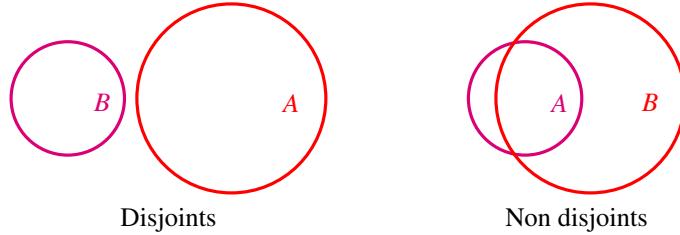
$$\begin{aligned} x \in F_1 \cup F_2 &\iff x \in F_1 \text{ ou } x \in F_2 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } 2x + 1 = 0 \text{ (cond. vérifiée)} \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \\ &\iff x \in \left\{ 1, -\frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

Donc

$$F_1 \cup F_2 = \left\{ 1, -\frac{1}{2} \right\}$$

## 2.2 Ensembles disjoints

**Définition 2.7 — Ensembles disjoints.** Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. On dit que  $A$  et  $B$  sont **disjoints** si  $A \cap B = \emptyset$ . Autrement dit, deux ensembles sont disjoints si et seulement s'ils n'ont aucun élément en commun.



### Exemple 2.8

$A$	$B$	Disjoints (Oui/Non)
$\{6, 12, 13\}$	$\{1, 2, 3\}$	Oui
$\{6, 12, 13\}$	$[\![1, 10]\!]$	Non car élément commun (6)
$\mathbb{R}$	$\mathbb{N}$	Non car élément commun (3)
$[0, 1]$	$[-1, 0[$	Oui
$]-\infty, -1]$	$\mathbb{N}$	Oui

## 2.3 Différence et complémentaire

**Définition 2.9 — Différence de deux ensembles.** Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . On appelle **différence** de  $A$  par  $B$ , notée  $A \setminus B$ , l'ensemble des éléments de  $A$  n'appartenant pas à  $B$ , c'est-à-dire

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

Autrement dit, on a

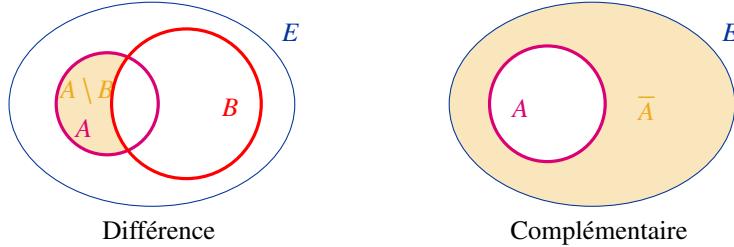
$$x \in A \setminus B \iff x \in A \text{ et } x \notin B.$$

**Définition 2.10 — Complémentaire d'un ensemble.** Soit  $A$  une partie de  $E$ . On appelle **complémentaire** de  $A$  dans  $E$ , notée  $E \setminus A$  ou  $A^c$  ou  $\bar{A}$ , l'ensemble des éléments de  $E$  n'appartenant pas à  $A$ , c'est-à-dire

$$\bar{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Autrement dit, on a

$$x \in \bar{A} \iff x \notin A.$$



### Exemple 2.11

Exemples	Opération	Résultats
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	Différence	$\mathbb{R}^*$
$[0, 2] \setminus [1, 3]$	Différence	$[0, 1[$
$]-\infty, 2]$	Complémentaire	$]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[$
$\mathbb{N} \setminus \{2p \mid p \in \mathbb{N}\}$	Différence	$\{2p + 1 \mid p \in \mathbb{N}\}$

**Proposition 2.12 — Opérations avec le complémentaire.** Soient  $A$  et  $B$  des parties de  $E$ . On a les relations suivantes.

- $A \cup \bar{A} = E$
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $\bar{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $\bar{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Interprétation géométrique.

**Exemple 2.13** Soit  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \neq 0\}$ . Déterminer  $\bar{A}$ .

*Espace ambiant : l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$*

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned} x \in \bar{A} &\iff x \notin A \\ &\iff x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ (cond. contraire vérifiée)} \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = 2 \\ &\iff x \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

Donc

$$\bar{A} = \{1, 2\}$$

## 2.4 Produit cartésien

**Définition 2.14 — Produit cartésien de deux ensembles.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. Le **produit cartésien** de  $E$  par  $F$ , noté  $E \times F$ , est l'ensemble des couples  $(x, y)$  tels que  $x \in E$  et  $y \in F$ , c'est-à-dire

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Autrement dit, on a

$$(x, y) \in E \times F \iff x \in E \text{ et } y \in F.$$

Si  $E = F$ , le produit cartésien  $E \times F$  se note  $E^2$ .

! Un couple d'éléments est constitué de deux éléments dans un certain ordre. On distingue donc le couple  $(a, b)$  (énumération ordonnée) de la paire  $\{a, b\}$  (énumération non ordonnée). Ainsi, de manière générale  $E \times F \neq F \times E$  car l'ordre importe dans un couple.

**Exemple 2.15**

$E$	$F$	Produit cartésien $E \times F$
$\{a\}$	$\{b\}$	$\{(a, b)\}$
$\{a, b\}$	$\{c\}$	$\{(a, c), (b, c)\}$
$\{0, 1\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$

**Définition 2.16 — Produit cartésien de plusieurs ensembles.** Soient  $E_1, \dots, E_n$  des ensembles. Le **produit cartésien** de ces  $n$  ensembles, noté  $E_1 \times \dots \times E_n$ , est l'ensemble des  $n$ -uplets  $(x_1, \dots, x_n)$  tels que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x_i \in E_i$ , c'est-à-dire

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in E_1 \text{ et } \dots \text{ et } x_n \in E_n\}.$$

Si  $E_1 = \dots = E_n$ , le produit cartésien se note  $E^n$ .

**Exemple 2.17** Considérons les trois ensembles suivants

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{3, 4\}, \quad C = \{6\}$$

Déterminons  $A \times B \times C$ .

On a

$$A \times B \times C = \{(1, 3, 6), (1, 4, 6), (2, 3, 6), (2, 4, 6)\}$$

## 2.5 Quelques généralisations à une famille de parties

Les définitions et propriétés des parties précédentes se généralisent à des familles d'ensembles.

**Définition 2.18** Soit  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de parties de  $E$ .

- On appelle **union** de la famille  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  l'ensemble des éléments de  $E$  qui appartiennent au moins à l'un des  $A_i$  :

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

- On appelle **intersection** de la famille  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  l'ensemble des éléments de  $E$  qui appartiennent à tous les  $A_i$  :

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

**Exemple 2.19 — Introduction aux probabilités.** On lance dix fois une pièce équilibré. On note pour tout  $k \in \{1, \dots, 10\}$ ,  $P_k$  l'événement «Obtenir Pile au  $k$ -ième lancer». Décrire les événements suivants en fonction des  $(P_k)_{k=1, \dots, 10}$ .

- L'événement  $A_1$  «On obtient Face au premier tirage»

$$A_1 = \overline{P_1}$$

- L'événement  $A_2$  «On obtient que des Pile»

$$A_2 = P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_{10}$$

- L'événement  $A_3$  «On obtient au moins une fois Face»

$$A_3 = \overline{P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_{10}} = \overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \dots \cup \overline{P_{10}}$$

- L'événement  $A_4$  «On obtient Pile pour la première fois au troisième lancer»

$$A_4 = \overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap P_3$$

- L'événement  $A_5$  «On obtient Pile pour la première fois au troisième lancer et Face pour la première fois au quatrième lancer»

$$A_5 = \emptyset$$

**Définition 2.20** Soit  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de parties de  $E$ .  
On dit que la famille  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  forme une **partition** de  $E$  si

- pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $A_i$  est non vide :

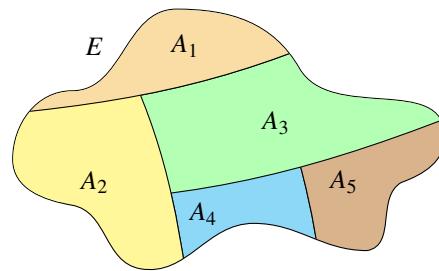
$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_i \neq \emptyset$$

- les  $A_i$  sont deux à deux disjoints :

$$\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$$

- l'union des parties forme l'ensemble  $E$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = E$$



Trouver une partition d'un ensemble revient à effectuer un «découpage» de l'ensemble en différentes parties pour lequel chaque élément de l'ensemble se trouve une fois et une seule fois dans une des parties.

**Exemple 2.21 — Introduction aux probabilités.** On lance un dé à six faces. On note  $\Omega$  l'univers, c'est-à-dire l'ensemble des résultats possibles :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Dire si les familles suivantes forment une partition de  $\Omega$ .

- La famille  $(A_1, A_2, \dots, A_6)$  où, pour tout  $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ ,  $A_i = \{i\}$ ? **OUI**
- La famille  $(A, B)$  où  $A = \{2, 4, 6\}$  et  $B = \{1, 3, 5\}$ ? **OUI**
- La famille  $(A, A_1, A_3, A_5)$ ? **OUI**
- La famille  $(A, A_1, A_3)$ ? **NON** (la réunion ne forme pas l'univers)
- La famille  $(B, A_1, A_2, A_4, A_6)$ ? **NON** (les événements ne sont pas deux à deux disjoints)