

TD 17 – Notion d'ensemble

Exercice 1 – Appartenance ou non-appartenance. Dans les phrases suivantes, remplacer les ____ par le symbole correspondant entre $\in$ et $\notin$.

$1 \text{ ____ } \{a^2 a \in \mathbb{R}\}$	$x \mapsto \exp(x) \text{ ____ } \mathbb{R}[x]$
$-2 \text{ ____ } \{a^2 a \in \mathbb{R}\}$	$x \mapsto x^3 + 1 \text{ ____ } \mathbb{R}_2[x]$
$(1, 2) \text{ ____ } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 x + y = 1\}$	$x \mapsto 2x^5 + x \text{ ____ } \mathbb{R}_5[x]$
$(-1, -1) \text{ ____ } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 y = \frac{1}{x}\}$	$x \mapsto x^2 + 1 \text{ ____ } \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} f \text{ paire}\}$
$(0, 2) \text{ ____ } \{(t, 2+t) t \in \mathbb{R}\}$	$x \mapsto x^2 + 2x + 1 \text{ ____ } \{f^2 f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$
$(0, 2, 3) \text{ ____ } \{(a, a+b, 0) a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$	$(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ ____ } \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\}$
$(1, 5, -1) \text{ ____ } \{(a, a+b, -a) a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$	$(2n+1)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ____ } \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2\}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ ____ } \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \det(M) > 0\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ____ } \{A^{-1} A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ inversible}\}$

Exercice 2 – Inclusion. Démontrer les inclusions suivantes.

$$\begin{aligned}
 \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2x + y = 1\} & \subset \{(t, 1 - 2t) | t \in \mathbb{R}\} \\
 \{(1 + a, b - 1, -a - b) | a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} & \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\} \\
 \{f : x \mapsto ax + b | a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\} & \subset \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | \exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0\} \\
 \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} | \exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N}, -c \leq nu_n \leq c\} & \subset \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} | \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\} \\
 \{x \in \mathbb{R} | x^4 = 4x - 1\} & \subset [0, +\infty[\\
 \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - y = 2\} & \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geq 0\}
 \end{aligned}$$

Exercice 3 – Non-Inclusion. Démontrer les non-inclusions suivantes.

$$\begin{aligned}
 \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\} & \not\subset \{(t, t^2) | t \in \mathbb{R}\} \\
 \{(a, -a, a) | a \in \mathbb{R}\} & \not\subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\} \\
 \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} | u_0 = 0\} & \not\subset \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} | \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\} \\
 \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} | (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique}\} & \not\subset \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} | \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\} \\
 \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | A^2 = 0_{2,2}\} & \not\subset \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | A \text{ inversible}\} \\
 \{A^2 | A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\} & \not\subset \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | A \text{ inversible}\}
 \end{aligned}$$

Exercice 4 – Double inclusion. Démontrer l'égalité $A = B$ par double inclusion lorsque

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t + 1, 4t + 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$
2. $A = \{(a - b, b, -2a + 3b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$
3. $A = [a, b]$ et $B = \{ta + (1 - t)b \mid t \in [0, 1]\}$ (pour a, b deux réels)
4. $A = [0, 1]$ et $B = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 \leq x\}$

Exercice 5 – Égalité par équivalence. Démontrer l'égalité $A = B$ grâce à un raisonnement par équivalence.

1. $A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid P(\alpha) = 0\}$ et $B = \{1, 2, -\frac{1}{2}\}$ où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x - 1)(x - 2)(2x + 1)$$

2. $A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^T = M\}$ et $B = \{\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ avec

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $A = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ géom., } u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - u_n = 0\}$ et $B = \{(v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = (-1)^n \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice 6 – Ensemble des parties. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ lorsque

- a. $E = \{1, 2\}$
- b. $E = \{a\}$
- c. $E = \{2, 4, 6\}$

Exercice 7 – Opérations sur les parties. Déterminer les ensembles suivants

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad \bar{A} \quad \text{et} \quad \bar{B}$$

lorsque

1. $A =]-\infty, 3[$ et $B = [0, 5]$ (dans l'espace ambiant $E = \mathbb{R}$)
2. $A =]-1, +\infty[$ et $B = [2, +\infty[$ (dans l'espace ambiant $E = \mathbb{R}$)
3. $A = \{0, 1\}$ et $B = \{1, 2\}$ (dans l'espace ambiant $E = \{0, 1, 2, 3\}$)

Exercice 8 – Intersection & Union. Déterminer les ensembles suivants en raisonnant par équivalence.

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 2z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$$

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T = M\} \cap \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T = -M\}$$

$$\mathbb{R}_2[x] \cap \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$$

Exercice 9 – Intersection. Déterminer l'ensemble suivant

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 2\} \cap \{(a + b, 2b, 2a - 3b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

Exercice 10 – Produit cartésien. Déterminer les produits cartésiens suivants

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\} \quad \{a, b\} \times \{c, d\} \quad \{0\} \times \{1, 2\} \times \{3, 4\}$$

Exercice 11 – Vrai/Faux. Les assertions suivantes sont-elles vérifiées pour toutes parties A, B, C d'un ensemble Ω ? On pourra s'aider de dessins pour répondre à ces questions.

1. $A \cap B \subset B$
2. $A \cup B \subset B$
3. $(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$
4. $(B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) = \Omega$
5. $(A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B) = \emptyset$
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
8. $A \cap \bar{B} \subset A \cup B$
9. $\bar{A} \cup (B \cap C) = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$
10. $(A \cap \bar{B}) \cup B = A \cup B$