TD 17 – NOTION D'ENSEMBLE (CORRECTION)

Exercice 1 – Appartenance ou non-appartenance. Dans les phrases suivantes, remplacer les _____ par le symbole correspondant entre $\in$ et $\notin$.

- En *italique*, les raisonnements par l'absurde.
- Cases remplies en blues : ensembles définis de manière paramétrique (via l'existence d'un paramètre))
- Cases non remplies : ensembles définis de manière conditionnelle (via une condition)

$1 \quad \in \quad \{a^2 \| a \in \mathbb{R}\}$	car il existe $a = 1 \in$ tel que $1 = a^2$
$-2 \quad \notin \quad \{a^2 \| a \in \mathbb{R}\}$	*car (par l'absurde) s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $-2 = a^2$, alors $-2 \geqslant 0$. Absurde.*
$(1,2) \quad \notin \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \| x+y=1\}$	car $1+2 \neq 1$
$(-1,-1) \quad \in \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \| y = \frac{1}{x}\}$	car $-1 = \frac{1}{-1}$
$(0,2) \quad \in \quad \{(t, 2+t) \| t \in \mathbb{R}\}$	car il existe $t = 0 \in \mathbb{R}$ tel que $(0,2) = (t, 2+t)$.
$(0,2,3) \quad \notin \quad \{(a, a+b, 0) \| a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$	*car (par l'absurde) s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tq $(0,2,3) = (a, a+b, 0)$ alors $3 = 0$. Absurde*
$(1,5,-1) \quad \in \quad \{(a, a+b, -a) \| a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$	car il existe $a = 1 \in \mathbb{R}$ et $b = 4 \in \mathbb{R}$ tq $(1,5,-1) = (a, a+b, -a)$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \in \quad \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \| \det(M) > 0\}$	car le déterminant de la matrice vaut $5 > 0$.
$f : x \mapsto \exp(x) \quad \notin \quad \mathbb{R}[x]$	*car (par l'absurde) si $f \in \mathbb{R}[x]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $f^{(n)} = 0$. Absurde.*
$x \mapsto x^3 + 1 \quad \notin \quad \mathbb{R}_2[x]$	car $\deg(x \mapsto x^3 + 1) = 3 > 2$
$x \mapsto 2x^5 + x \quad \in \quad \mathbb{R}_5[x]$	car $\deg(x \mapsto x^5 + 1) = 5 \leqslant 5$
$x \mapsto x^2 + 1 \quad \in \quad \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \| f \text{ paire }\}$	car $\forall x \in \mathbb{R}, (-x)^2 + 1 = x^2 + 1$
$x \mapsto x^2 + 2x + 1 \quad \in \quad \{f^2 \| f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$	car il existe $f : x \mapsto x+1$ tel que, $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 1 = f(x)^2$
$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \quad \in \quad \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \| \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0\}$	car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$
$(2n+1)_{n \in \mathbb{N}} \quad \in \quad \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \| \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2\}$	car, $\forall n \in \mathbb{N}, 2(n+1) + 1 = 2n + 1 + 2$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \in \quad \{A^{-1} \| A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ inversible}\}$	car il existe $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ inversible tq $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$.

Exercice 2 – Inclusion.

- Montrons que

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2x + y = 1\} \quad \subset \quad E = \{(t, 1-2t) | t \in \mathbb{R}\}$$

*(**Espace ambiant** : l'ensemble des couples de nombres réels.)*

Soit $(x,y) \in F$, c'est-à-dire vérifiant

$$2x + y = 1 \qquad (\textit{condition} \text{ vérifiée})$$

Montrons que $(x,y) \in E$, c'est-à-dire montrons que

il existe un paramètre $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = (t, 1-2t)$ (existence *paramètre*)

Posons $t = x \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\begin{aligned} (x,y) &= (x, 1-2x) && \text{car } 2x + y = 1 \\ &= (t, 1-2t) && \text{car } t = x \end{aligned}$$

Donc $(x,y) \in E$. D'où $F \subset E$.

- Montrons que

$$F = \{(1+a, b-1, -a-b) | a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} \quad \subset \quad E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z = 0\}$$

*(**Espace ambiant** : l'ensemble des triplets de nombres réels.)*

Soit $(x,y,z) \in F$, c'est-à-dire

il existe 2 paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y,z) = (1+a, b-1, -a-b)$ (existence *param*)

Montrons que $(x,y,z) \in E$, c'est-à-dire montrons que

$$x + y + z = 0 \qquad (\textit{condition} \text{ à vérifier})$$

On a,

$$x + y + z = (1+a) + (b-1) + (-a-b) = 0$$

Donc $(x,y,z) \in E$. D'où $F \subset E$.

- Montrons que

$$F = \{f : x \mapsto ax + b | a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\} \quad \subset \quad E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0\}$$

*(**Espace ambiant** : l'ensemble des fonctions.)*

Soit $f \in F$, c'est-à-dire

il existe 2 paramètres $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ (existence *param.*)

Montrons que $f \in E$, c'est-à-dire montrons que

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad f(x_0) = 0 \qquad (\textit{condition} \text{ à vérifier})$$

Posons $x_0 = -\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$ (bien défini car $a \neq 0$!). Alors

$$f(x_0) = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$$

Donc $f \in E$. D'où $F \subset E$.

- Montrons que

$$F=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}|\exists c>0,\forall n\in\mathbb{N},-c\leqslant nu_n\leqslant c\}\quad\subset\quad E=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}|\lim_{n\to+\infty}u_n=0\}$$

*(**Espace ambiant** : l'ensemble des suites)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F$, c'est-à-dire

$$\exists c>0,\ \ \forall n\in\mathbb{N},\ \ -c\leqslant nu_n\leqslant c\qquad\text{(condition } \textit{vérifiée}\text{)}$$

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$, c'est-à-dire montrons que

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0\qquad(\textit{condition}\text{ à vérifier})$$

On a

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ -c\leqslant nu_n\leqslant c$$

Donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ -\frac{c}{n}\leqslant u_n\leqslant\frac{c}{n}$$

Or les deux suites $\left(-\frac{c}{n}\right)$ et $\left(\frac{c}{n}\right)$ converge vers 0. Donc, par **théorème d'encadrement**, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$. D'où $F\subset E$.

- Montrons que

$$F=\{x\in\mathbb{R}|x^4=4x-1\}\quad\subset\quad[0,+\infty[$$

*(**Espace ambiant** : l'ensemble des nombres réels)*

Soit $x\in F$, c'est-à-dire

$$x^4=4x-1\qquad\text{(condition } \textit{vérifiée}\text{)}$$

Montrons que $x\in[0,+\infty[$, c'est-à-dire montrons que

$$x\geqslant 0\qquad(\textit{condition}\text{ à vérifier})$$

On a

$$x^4=4x-1$$

Donc

$$x=\frac{x^4+1}{4}\geqslant 0$$

Donc $x\in[0,+\infty[$. D'où $F\subset[0,+\infty[$.

- Montrons que

$$F=\{(x,y)\ \in\mathbb{R}^2|x-y=2\}\quad\subset\quad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|(3x+y+2)(x+2y+4)\geqslant 0\}$$

*(**Espace ambiant** : l'ensemble des couples de nombres réels)*

Soit $(x,y)\in F$, c'est-à-dire

$$x-y=2\qquad\text{(condition } \textit{vérifiée}\text{)}$$

Montrons que $x\in E$, c'est-à-dire montrons que

$$(3x+y+2)(x+2y+4)\geqslant 0\qquad(\textit{condition}\text{ à vérifier})$$

Comme $x-y=2$, on a $y=x-2$ et donc

$$3x+y+2=3x+x-2+2=4x$$

De même,

$$x+2y+4=x+2(x-2)+4=3x$$

Finalement,

$$(3x+y+2)(x+2y+4)=12x^2\geqslant 0$$

Donc $(x,y)\in E$. D'où $F\subset E$.

Exercice 3 – Non-Inclusion.

- Montrons que
$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x+y=0\}\quad\not\subset\quad F=\{(t,t^2)|t\in\mathbb{R}\}$$

*(**Espace ambiant** : l'ensemble des couples de nbres réels.)*

On cherche un *couple* (x,y) qui appartient à E mais qui n'appartient pas à F

Soit $(x,y)=(1,-1)\in\mathbb{R}^2$.

- D'une part, $(x,y)\in E$ car $1+(-1)=0$ (*condition* vérifiée)
- D'autre part, montrons que $(x,y)\notin F$. Pour cela, on raisonne *par l'absurde*. Supposons par l'absurde que (x,y) est dans F. Alors,
$$\text{il existe } t\in\mathbb{R},\ (1,-1)=(t,t^2)\qquad\text{(existence } \textit{paramètre}\text{)}$$
Alors $t^2=-1\leqslant 0$. C'est absurde. Donc $(x,y)\notin F$.

Ainsi, on a exhibé un élément $(x,y)\in E$ tel que $(x,y)\notin F$. Donc $E\not\subset F$.

- Montrons que
$$E=\{(a,-a,a)|a\in\mathbb{R}\}\quad\not\subset\quad F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+y+z=0\}$$

*(**Espace ambiant** : l'ensemble des triplets de nbres réels.)*

On cherche un *triplet* (x,yx) qui appartient à E mais qui n'appartient pas à F

Soit $(x,y,z)=(1,-1,1)\in\mathbb{R}^3$.

- D'une part, $(x,y,z)\in E$ car il existe $a=1\in\mathbb{R}$ tel que $(1,-1,1)=(a,-a,a)$ (existence *paramètre*)
- D'autre part, $(x,y,z)\notin F$ car $1+(-1)+1\neq 0$ (*condition* non vérifiée)

Ainsi, on a exhibé un élément $(x,y,z)\in E$ tel que $(x,y,z)\notin F$. Donc $E\not\subset F$.

- Montrons que
$$E=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}|u_0=0\}\quad\not\subset\quad F=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}|\lim_{n\to+\infty}u_n=0\}$$

*(**Espace ambiant** : l'ensemble des suites.)*

On cherche une *suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui appartient à E mais qui n'appartient pas à F

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=n$.

- D'une part, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$ car $u_0=0$ (*condition* vérifiée)
- D'autre part, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\notin F$ car $\lim u_n=+\infty\neq 0$ (*condition* non vérifiée)

Ainsi, on a exhibé un élément $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\notin F$. Donc $E\not\subset F$.

- Montrons que
$$E=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}|(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ est géométrique }\}\quad\not\subset\quad F=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}|\lim_{n\to+\infty}u_n=0\}$$

*(**Espace ambiant** : l'ensemble des couples de nbres réels.)*

On cherche une *suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui appartient à E mais qui n'appartient pas à F

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=2^n$.

- D'une part, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$ car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique car
$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_{n+1}=2u_n$$
(*condition* vérifiée)
- D'autre part, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\notin F$ car $\lim u_n=+\infty\neq 0$ (car $2>1$) (*condition* non vérifiée)

Ainsi, on a exhibé un élément $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\notin F$. Donc $E\not\subset F$.

- Montrons que

$$E = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) | A^2 = 0_{2,2}\} \quad \not\subset \quad F = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) | \ A \text{ inversible}\}$$

*(**Espace ambiant** : l'ensemble des matrices (de taille* 2×2*.)*

On cherche une *matrice* $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui appartient à E mais qui n'appartient pas à F

<u>Soit</u>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- D'une part, $A \in E$ car

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2,2}$$

  (*condition* vérifiée)
- D'autre part, $A \notin F$ car A n'est pas inversible car c'est une matrice 2×2 et son déterminant vaut 0.

Ainsi, on a exhibé un élément $A \in E$ tel que $A \notin F$. Donc $E \not\subset F$.

- Montrons que

$$E = \{A^2 | A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})\} \quad \not\subset \quad F = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) | \ A \text{ inversible}\}$$

*(**Espace ambiant** : l'ensemble des matrices (de taille* 2×2*.)*

On cherche une *matrice* $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui appartient à E mais qui n'appartient pas à F

<u>Soit</u>

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- D'une part, $M \in E$ car

$$\text{il existe } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tq } M = A^2$$

  (existence *paramètre*)
- D'autre part, $M \notin F$ car M n'est pas inversible car c'est une matrice 2×2 et son déterminant vaut 0.

Ainsi, on a exhibé un élément $M \in E$ tel que $M \notin F$. Donc $E \not\subset F$.

Exercice 4 – Doucle inclusion. Démontrer l'égalité $A = B$ par double inclusion lorsque

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t+1, 4t+3) | t \in \mathbb{R}\}$
2. $A = \left\{(a-b, b, -2a+3b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ et $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\right\}$
3. $A = [a,b]$ et $B = \{ta + (1-t)b | t \in \mathbb{R}\}$ (pour a, b deux réels)
4. $A = [0,1]$ et $B = \{x \in \mathbb{R}_+ | x^2 \leqslant x\}$

1. Montrons que

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 4x - y = 1\} = \{(t+1, 4t+3) | t \in \mathbb{R}\}$$

Espace ambiant *: l'ensemble de couples de nombres réels* $\mathbb{R}^2$. Notons A l'ensemble de gauche et B l'ensemble de droite. Montrons l'égalité de ces deux ensembles par *double inclusion*.

- Montrons que $A \subset B$.
  Soit $u = (x,y) \in A$, c'est-à-dire

  $$4x - y = 1 \qquad (\textit{condition} \text{ vérifiée})$$

  Montrons que $u = (x,y) \in B$, c'est-à-dire montrons que

  il existe un paramètre $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = (t+1, 4t+3)$ (existence *paramètre*)

  Posons $t = x - 1 \in \mathbb{R}$ (et donc $x = t+1$). On a

  $$\begin{aligned} (x,y) &= (t+1, y) && \text{car } t = x-1 \\ &= (t+1, 4x-1) && \text{car } 4x - y = 1 \\ &= (t+1, 4(t+1)-1) && \text{car } t = x-1 \\ &= (t+1, 4t+3) \end{aligned}$$

  Donc $u \in B$. D'où $A \subset B$.

- Montrons que $B \subset A$.
  Soit $u = (x,y) \in B$, c'est-à-dire

  il existe un paramètre $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = (t+1, 4t+3)$ (existence *paramètre*)

  Montrons que $u = (x,y) \in A$, c'est-à-dire montrons que

  $$4x - y = 1 \qquad (\textit{condition} \text{ à vérifier})$$

  On a

  $$4x - y = 4(t+1) - (4t+3) = 4t + 4 - 4t - 3 = 1$$

  Donc $u = (x,y) \in A$. D'où $B \subset A$.

- Comme $A \subset B$ et $B \subset A$, par *principe de double inclusion*, on a montré que $A = B$.

2. Montrons que

$$\{(a-b,b,-2a+3b),\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x-y+z=0\}$$

Espace ambiant *: l'ensemble de triplets de nombres réels* $\mathbb{R}^3$. Notons A l'ensemble de gauche et B l'ensemble de droite. Montrons l'égalité de ces deux ensembles par *double inclusion*.

- Montrons que $A \subset B$.

  Soit $u=(x,y,z)\in A$, c'est-à-dire

  il existe deux paramètres $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $(x,y,z)=(a-b,b,-2a+3b)$ (existence *paramètre*)

  Montrons que $u=(x,y,z)\in B$, c'est-à-dire montrons que

  $$2x-y+z=0 \qquad (\textit{condition} \text{ à vérifier})$$

  On a

  $$2x-y+z = 2(a-b)-b+(-2a+3b) = 2a-2b-b-2a+3b = 0$$

  Donc $u=(x,y,z)\in B$. D'où $A\subset B$.

- Montrons que $B\subset A$.

  Soit $u=(x,y,z)\in B$, c'est-à-dire

  $$2x-y+z=0 \qquad (\textit{condition} \text{ vérifiée})$$

  Montrons que $u=(x,y,z)\in A$, c'est-à-dire montrons que

  il existe deux paramètres $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $(x,y,z)=(a-b,b,-2a+3b)$ (existence *paramètre*)

  Posons $a=x+y\in\mathbb{R}$ et $b=y\in\mathbb{R}$ (et donc $a-b=x$) On a

  $$\begin{aligned}(x,y,z) &= (a-b,b,z) && \text{par choix de } a \text{ et } b\\ &= (a-b,b,-2x+y) && \text{car } 2x-y+z=0\\ &= (a-b,b,-2(a-b)+b)\\ &= (a-b,b,-2a+3b)\end{aligned}$$

  Donc $u=(x,y,z)\in A$. D'où $B\subset A$.

- Comme $A\subset B$ et $B\subset A$, par *principe de double inclusion*, on a montré que $A=B$.

3. Soient $a < b$. Montrons que

$$[a,b] = \{ta + (1-t)b | t \in [0,1]\}$$

***Espace ambiant** : l'ensemble de nombres réels* $\mathbb{R}$. Notons B l'ensemble de droite. Montrons l'égalité de ces deux ensembles par *double inclusion*.

- Montrons que $[a,b] \subset B$.

  Soit $x \in [a,b]$, c'est-à-dire

  $$a \leqslant x \leqslant b \quad (\textit{condition} \text{ vérifiée})$$

  Montrons que $x \in B$, c'est-à-dire montrons que

  il existe un paramètre $t \in [0,1]$ tel que $x = ta + (1-t)b$ (existence *paramètre*)

  Posons $t = \frac{x-b}{a-b}$. Tout d'abord, $t \in [0,1]$ car

  $$\begin{array}{lll} & a \leqslant x \leqslant b & \\ \text{donc} & a-b \leqslant x-b \leqslant 0 & \\ \text{donc} & 1 \geqslant \frac{x-b}{a-b} \geqslant 0 & \text{car } a-b<0 \\ \text{donc} & 1 \geqslant t \geqslant 0 & \end{array}$$

  De plus,

  $$ta + (1-t)b = \frac{x-b}{a-b} \times a + \left(1 - \frac{x-b}{a-b}\right) b = x$$

  Donc $x \in B$. D'où $[a,b] \subset B$.

- Montrons que $B \subset [a,b]$.

  Soit $x \in B$, c'est-à-dire

  il existe un paramètre $t \in [0,1]$ tel que $x = ta + (1-t)b$ (existence *paramètre*)

  Montrons que $x \in [a,b]$, c'est-à-dire montrons que

  $$a \leqslant x \leqslant b \quad (\textit{condition} \text{ à vérifier})$$

  (Pour se simplifier, on va suppose que $0 < a < b$, les autres cas se traitent de même.) On sait que

  $$0 \leqslant t \leqslant 1 \qquad \text{et que} \qquad x = ta + (1-t)b = b + t(a-b)$$

  Donc, comme $0 \leqslant t \leqslant 1$ et que $a - b < 0$, on obtient

  $$0 \geqslant t(a-b) \geqslant a-b$$

  Et donc

  $$b \geqslant t(a-b) + b \geqslant a - b + b$$

  c'est-à-dire

  $$a \leqslant x \leqslant b.$$

  Donc $x \in [a,b]$. D'où $B \subset [a,b]$.

- Comme $[a,b] \subset B$ et $B \subset [a,b]$, par *principe de double inclusion*, on a montré que $[a,b] = B$.

4. Montrons que
$$[0,1] = \{x \in \mathbb{R}_+ | x^2 \leqslant x\}$$

Espace ambiant : *l'ensemble de nombres réels* $\mathbb{R}$. Notons B l'ensemble de droite. Montrons l'égalité de ces deux ensembles par *double inclusion*.

- Montrons que $[0,1] \subset B$.

  Soit $x \in A$, c'est-à-dire
  $$0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad (\textit{condition} \text{ vérifiée})$$
  Montrons que $x \in B$, c'est-à-dire montrons que
  $$x^2 \leqslant x \qquad (\textit{condition} \text{ à vérifier})$$
  On a :
  $$x^2 - x = x(x-1) \geqslant 0$$
  car $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 1$. Donc $x \in B$. D'où $[0,1] \subset B$.

- Montrons que $B \subset [0,1]$.

  Soit $x \in B$, c'est-à-dire
  $$x^2 \leqslant x \qquad (\textit{condition} \text{ vérifiée})$$
  Montrons que $x \in [0,1]$, c'est-à-dire montrons que
  $$0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad (\textit{condition} \text{ à vérifier})$$
  Donnons le tableau de signe du polynôme $x \mapsto x^2 - x$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  Ainsi,
  $$x^2 - x \leqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in [0,1]$$
  Or, comme on sait que $x^2 \leqslant x$, on en déduit que $x \in [0,1]$. D'où $B \subset [0,1]$.

- Comme $[0,1] \subset B$ et $B \subset [0,1]$, par *principe de double inclusion*, on a montré que $[0,1] = B$.

Exercice 5 – Égalité par équivalence.

• Montrons que

$$\{\alpha \in \mathbb{R} | P(\alpha) = 0\} = \{1, 2, -\frac{1}{2}\}$$

Notons A l'ensemble de gauche et B l'ensemble de droite et raisonnons par équivalence.

***Espace ambiant** : l'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par *équivalence*.

$$\begin{aligned}
x \in A \quad & \Leftrightarrow \quad P(x) = 0 \qquad (\textit{condition}\ \text{vérifiée}) \\
& \Leftrightarrow \quad (x-1)(x-2)(2x+1) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x-1 = 0 \text{ ou } x-2 = 0 \text{ ou } 2x+1 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \\
& \Leftrightarrow \quad x \in \{1, 2, -\frac{1}{2}\} \\
& \Leftrightarrow \quad x \in B
\end{aligned}$$

Donc $A = B$.

• Montrons que

$$\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) | M^T = M\} = \{\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

avec

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons A l'ensemble de gauche et B l'ensemble de droite et raisonnons par équivalence.

***Espace ambiant** : l'ensemble des matrices de taille* 2×2.

Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Raisonnons par *équivalence*.

$$\begin{aligned}
M \in A \quad & \Leftrightarrow \quad M = M^T \qquad (\textit{condition}\ \text{vérifiée}) \\
& \Leftrightarrow \quad \exists a, b, c, d \in \mathbb{R},\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ telle que } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists a, b, c, d \in \mathbb{R},\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ telle que } c = b \\
& \Leftrightarrow \quad \exists a, b, d \in \mathbb{R},\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists a, b, d \in \mathbb{R},\ M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists a, b, d \in \mathbb{R},\ M = aM_1 + dM_2 + bM_3 \\
& \Leftrightarrow \quad M \in B
\end{aligned}$$

Donc $A = B$.

• Montrons que

$$\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} | (u_n) \text{ géom.}, u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - u_n = 0\} = \{(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_n = (-1)^n \qquad \text{avec} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Notons A l'ensemble de gauche et B l'ensemble de droite et raisonnons par équivalence.

Espace ambiant *: l'ensemble des suites.*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Raisonnons par *équivalence*.

$$\begin{aligned}
(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A \quad & \Leftrightarrow \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ géom.}, u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - u_n = 0 \qquad (\textit{cond} \text{ vérifiée})\\
& \Leftrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{R}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - u_n = 0\\
& \Leftrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{R}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, 2q^{n+3} + 3q^{n+2} - q^n = 0\\
& \Leftrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{R}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \quad \text{avec} \quad 2q^3 + 3q^2 - 1 = 0\\
& \Leftrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{R}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \quad \text{avec} \quad (q+1)^2(2q-1) = 0\\
& \Leftrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{R}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \quad \text{avec} \quad (q = -1 \text{ ou } q = \frac{1}{2})\\
& \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \quad \text{ou} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\\
& \Leftrightarrow \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B
\end{aligned}$$

Donc $A = B$.

Exercice 6 – Ensemble des parties. Déterminer $\mathscr{P}(E)$ lorsque

a. $E = \{1,2\}$ b. $E = \{a\}$ c. $E = \{2,4,6\}$

a. On a
$$\mathscr{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

b. On a
$$\mathscr{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$$

c. On a
$$\mathscr{P}(\{2,4,6\}) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}, \{2,4,6\}\}$$

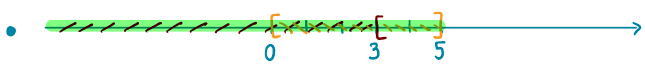
Exercice 7 – Opérations sur les parties. Déterminer les ensembles suivants

$$A \cup B, \qquad A \cap B, \qquad A \setminus B, \qquad B \setminus A, \qquad \overline{A} \quad \text{et} \quad \overline{B}$$

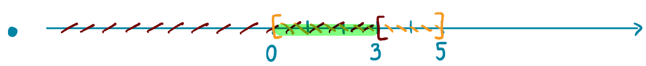
lorsque

1. $A =]-\infty, 3[$ et $B = [0, 5]$ (dans l'espace ambiant $E = \mathbb{R}$)
2. $A =]-1, +\infty[$ et $B = [2, +\infty[$ (dans l'espace ambiant $E = \mathbb{R}$)
3. $A = \{0, 1\}$ et $B = \{1, 2\}$ (dans l'espace ambiant $E = \{0, 1, 2, 3\}$)

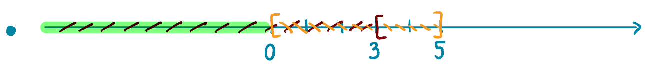
1. Soient $A =]-\infty, 3[$ et $B = [0, 5]$ (espace ambiant $E = \mathbb{R}$).

- 

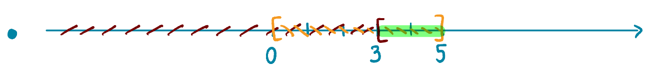
Donc $A \cup B =]-\infty, 5]$

- 

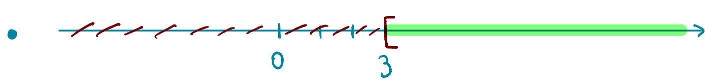
Donc $A \cap B = [0, 3[$

- 

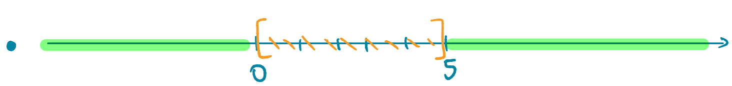
Donc $A \setminus B =]-\infty, 0[$

- 

Donc $B \setminus A = [3, 5]$

- 

Donc $\overline{A} = [3 ; +\infty[$

- 

Donc $\overline{B} =]-\infty, 0[\cup]5 ; +\infty[$

2. Soient $A =]-1, +\infty[$ et $B = [2, +\infty[$ (espace ambiant $E = \mathbb{R}$). On a :

$$A \cup B =]-1, +\infty[\qquad A \cap B = [2, +\infty[\qquad A \setminus B =]-1, 2[$$

$$B \setminus A = \emptyset \qquad \overline{A} =]-\infty, -1] \qquad \overline{B} =]-\infty, 2[$$

3. Soient $A = \{0, 1\}$ et $B = \{1, 2\}$ (dans l'espace ambiant $E = \{0, 1, 2, 3\}$)

$$A \cup B = \{0, 1, 2\} \qquad A \cap B = \{1\} \qquad A \setminus B = \{0\}$$

$$B \setminus A = \{2\} \qquad \overline{A} = \{2, 3\} \qquad \overline{B} = \{0, 3\}$$

Exercice 8 – Intersection & Union.

• On note $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 2z = 0\}$ et $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0\}$. Déterminons l'intersection $F_1 \cap F_2$.

***Espace ambiant** : l'ensemble des triplets* $\mathbb{R}^3$

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Raisonnons par *équivalence*.

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) \in F_1 \cap F_2 & \Leftrightarrow & (x,y,z) \in F_1 \ \underline{\text{et}} \ (x,y,z) \in F_2 \\ & \Leftrightarrow & 2x - y + 2z = 0 \text{ (cond. vérifiée)} \ \underline{\text{et}} \ x + y + 3z = 0 \text{ (cond. vérifiée)} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On aboutit à un **système linéaire** que l'on résout par *pivot de Gauss*.

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) \in F_1 \cap F_2 & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ & - & 3y & - & 4z & = & 0 \end{array} \right. \quad L_2 \to L_2 - 2L_1 \end{array}$$

Nbre d'inconnues > Nbre d'équations. On choisit deux inconnues principales, par exemple x et y, que l'on exprime en fonction de l'inconnue restante.

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) \in F_1 \cap F_2 & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ & & y & & & = & -\frac{4}{3}z \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{5}{3}z \\ y & = & -\frac{4}{3}z \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & (x,y,z) = \left(-\frac{5}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right) \\ & \Leftrightarrow & (x,y,z) \in \left\{ \left(-\frac{5}{3}z, -1 + \frac{2}{5}z, z\right) |z \in \mathbb{R} \right\} \end{array}$$

Donc

$$F_1 \cap F_2 = \left\{ \left(-\frac{5}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right) |z \in \mathbb{R} \right\}$$

• On note $F_1 = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4x + 2 = 0\}$ et $F_2 = \{x \in \mathbb{R} | x^2 = 1\}$. Déterminons l'union $F_1 \cup F_2$.

***Espace ambiant** : l'ensemble des nbres réels* $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par *équivalence*.

$$\begin{array}{rcl} x \in F_1 \cup F_2 & \Leftrightarrow & x \in F_1 \ \underline{\text{ou}} \ x \in F_2 \\ & \Leftrightarrow & x^2 - 4x + 2 = 0 \text{ (cond. vérifiée)} \ \underline{\text{ou}} \ x^2 = 1 \text{ (cond. vérifiée)} \\ & \Leftrightarrow & (x-2)^2 = 0 \ \underline{\text{ou}} \ x^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow & x = 2 \ \underline{\text{ou}} \ (x = 1 \text{ ou } x = -1) \\ & \Leftrightarrow & x \in \{2, 1, -1\} \end{array}$$

Donc

$$F_1 \cup F_2 = \{2, 1, -1\}$$

• On note $F_1 = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) | M^T = M\}$ et $F_2 = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) | M^T = -M\}$. Déterminons $F_1 \cap F_2$.

***Espace ambiant** : l'ensemble des matrices de taille $n \times n$*

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Raisonnons par *équivalence*.

$$\begin{array}{lcl} M \in F_1 \cap F_2 & \Leftrightarrow & M \in F_1 \quad \underline{\text{et}} \quad M \in F_2 \\ & \Leftrightarrow & M^T = M \text{ (cond. vérifiée)} \quad \underline{\text{et}} \quad M^T = -M \text{ (cond. vérifiée)} \\ & \Leftrightarrow & M^T = M = -M \\ & \Leftrightarrow & 2M = 0_{n,n} \\ & \Leftrightarrow & M = 0_{n,n} \end{array}$$

Donc

$$F_1 \cap F_2 = \{0_{n,n}\}$$

• On note $F_1 = \mathbb{R}_2[x]$ et $F_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(0) = 0\}$. Déterminons $F_1 \cap F_2$.

***Espace ambiant** : l'ensemble des fonctions*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Raisonnons par *équivalence*.

$$\begin{array}{lcl} f \in F_1 \cap F_2 & \Leftrightarrow & f \in F_1 \quad \underline{\text{et}} \quad f \in F_2 \\ & \Leftrightarrow & \exists a,b,c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c \text{ (existence para)} \quad \underline{\text{et}} \quad f(0) = 0 \text{ (cond. vérifiée)} \\ & \Leftrightarrow & \exists a,b,c \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c \quad \underline{\text{et}} \quad c = 0 \\ & \Leftrightarrow & \exists a,b \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx = x(ax+b) \\ & \Leftrightarrow & f \in \{x \mapsto x(ax+b) | a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

Donc

$$F_1 \cap F_2 = \{x \mapsto x(ax+b) | a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 9 – Intersection. Déterminer l'ensemble suivant

$$\underbrace{\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+y-z=2\}}_{=E}\cap\underbrace{\{(a+b,2b,2a-3b),\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}}_{=F}$$

★ Soit $(x,y,z)\in E\cap F$.
Donc $(x,y,z)\in E$ et $(x,y,z)\in F$.

- Comme $(x,y,z)\in E$, on sait que
$$2x+y-z=2$$
- Comme $(x,y,z)\in F$, on sait qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tq
$$\begin{cases} x=a+b \\ y=2b \\ z=2a-3b \end{cases}$$

Donc en combinant les deux informations, on obtient que
$$\begin{aligned} 2 &= 2x+y-z \\ &= 2(a+b)+2b-(2a-3b) \\ &= \cancel{2a}+2b+2b-\cancel{2a}+3b \\ &= 7b \end{aligned}$$
donc $b=\frac{2}{7}$

Donc $(x,y,z)=\left(a+\frac{2}{7},\frac{4}{7},2a-\frac{6}{7}\right)$ avec $a\in\mathbb{R}$.

Donc $E\cap F\subset\left\{\left(a+\frac{2}{7},\frac{4}{7},2a-\frac{6}{7}\right);\ a\in\mathbb{R}\right\}=G$.

★ Montrons l'inclusion inverse.
Soit $(x,y,z)\in G$. Montrons que $(x,y,z)\in E\cap F$.
Comme $(x,y,z)\in G$, on sait qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tq
$$\begin{cases} x=a+\frac{2}{7} \\ y=\frac{4}{7} \\ z=2a-\frac{6}{7} \end{cases}$$

- D'une part, on a
$$\begin{aligned} 2x+y-z &= 2\left(a+\tfrac{2}{7}\right)+\tfrac{4}{7}-\left(2a-\tfrac{6}{7}\right) \\ &= 2a+\tfrac{4}{7}+\tfrac{4}{7}-2a+\tfrac{6}{7} \\ &= \tfrac{14}{7} \\ &= 2 \end{aligned}$$
Donc $(x,y,z)\in E$

- D'autre part, on a
$$(x,y,z)=(\tilde{a}+\tilde{b},2\tilde{b},2\tilde{a}-3\tilde{b}) \quad \text{avec } \tilde{a}=a \text{ et } \tilde{b}=\tfrac{2}{7}$$
car $\begin{cases} \tilde{a}+\tilde{b}=a+\frac{2}{7}=x \\ 2\tilde{b}=2\times\frac{2}{7}=\frac{4}{7}=y \\ 2\tilde{a}-3\tilde{b}=2a-\frac{6}{7}=z \end{cases}$

Donc $(x,y,z)\in F$

Donc $(x,y,z)\in E\cap F$. Donc $G\subset E\cap F$.

$\boxed{\text{Conclusion :}}$ On a
$$E\cap F=G=\left\{\left(a+\tfrac{2}{7},\tfrac{4}{7},2a-\tfrac{6}{7}\right);\ a\in\mathbb{R}\right\}$$

Exercice 10 – Produit cartésien. Déterminer les produits cartésiens suivants

$$\{0,1\} \times \{0,1\} \qquad \{a,b\} \times \{c,d\} \qquad \{0\} \times \{1,2\} \times \{3,4\}$$

On a

$$\{0,1\} \times \{0,1\} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

On a

$$\{a,b\} \times \{c,d\} = \{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}$$

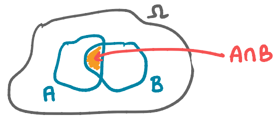
On a

$$\{0\} \times \{1,2\} \times \{3,4\} = \{(0,1,3),(0,1,4),(0,2,3),(0,2,4)\}$$

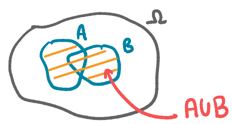
Exercice 11 – Vrai/Faux. Les assertions suivantes sont-elles vérifiées pour toutes parties A, B, C d'un ensemble Ω ? *On pourra s'aider de dessins pour répondre à ces questions.*

1. $A \cap B \subset B$
2. $A \cup B \subset B$
3. $(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$
4. $(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = \Omega$
5. $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7. $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
8. $A \cap \overline{B} \subset A \cup B$
9. $\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
10. $(A \cap \overline{B}) \cup B = A \cup B$

1. Vrai (voir dessin)



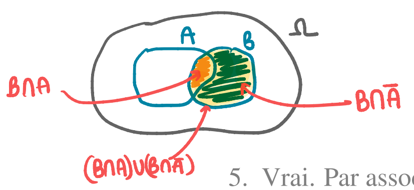
2. Faux. Par exemple avec $A = \{0, 1\}$ et $B = \{2, 3\}$,



$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3\} \not\subset B$$

3. Vrai (ppté du cours)

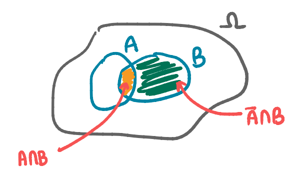
4. Faux. De manière générale, par distributivité, on a,



$$(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = (B \cap A \cup B) \cap (B \cap A \cup \overline{A}) = B \cap B = B$$

5. Vrai. Par associativité,

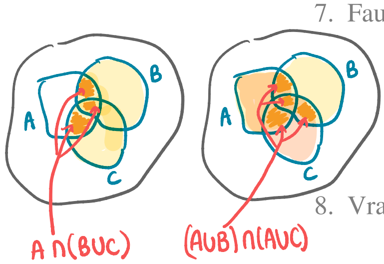
$$(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = A \cap \overline{A} \cap B \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$$



6. Vrai. (ppté d'associativité du cours)

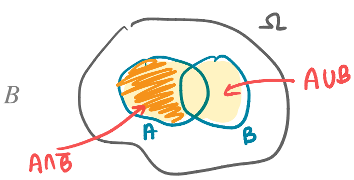
7. Faux. Avec $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$, $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$ et $C = \{1, 3\}$, on a

$$A \cap (B \cup C) = \{1\} \quad \text{alors que} \quad (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{0, 1\}$$



8. Vrai car

$$A \cap \overline{B} \subset A \subset A \cup B$$



9. Faux. Avec $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$, $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$ et $C = \{1, 3\}$, on a

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = \{2, 3\} \quad \text{alors que} \quad \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \emptyset$$

10. Vrai car par associativité

$$(A \cap \overline{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) = (A \cup B) \cap \Omega = A \cup B$$