18. Limite d'une fonction

Dans tout ce chapitre, f désigne une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$; I désigne un intervalle de d_f ; a désigne un nombre réel ou $-\infty$ et b désigne un nombre réel ou $+\infty$.

Propriétés locales d'une fonction

La notion de limite (comme la notion de continuité ou de dérivabilité) est une notion *locale*. Pour étudier, par exemple, la limite d'une fonction en $+\infty$, il n'est pas utile de connaître le comportement de la fonction sur tout $\mathbb{R}$, il suffit de l'étudier sur un «intervalle contenant $+\infty$».

Illustration graphique.

Exemple 0.1 La fonction sinus est-elle croissante au voisinage de 0 ? au voisinage de $\frac{\pi}{2}$?

Réponse graphique.

1 Limite (éventuelle) d'une fonction

On cherche définir $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ avec $a \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ et que le résultat de la limite appartienne à $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

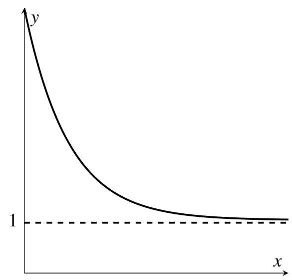
1.1 Convergence en $+\infty$ ou $-\infty$

Définition 1.1 — Convergence vers un réel. Soit ℓ un réel.

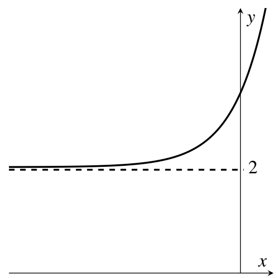
	Voisinage	Notation	Définition
Cv. en $+\infty$ vers $\ell \in \mathbb{R}$	$I =]a, +\infty[$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \ x \geqslant A \Rightarrow \lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant \varepsilon$
Cv. en $-\infty$ vers $\ell \in \mathbb{R}$	$I =]-\infty, b[$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \ x \leqslant A \Rightarrow \lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant \varepsilon$

On note alors
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell \qquad \text{ou encore} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \ell$$

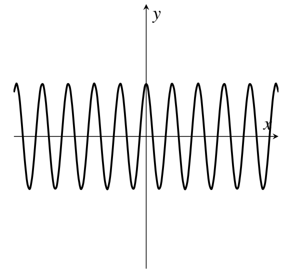
Comme pour les suites, ces phrases quantifiées traduisent le fait que l'écart entre la fonction est sa limite est, à partir d'un certain moment, aussi petit que l'on souhaite.



La fonction semble converger vers 1 en $+\infty$.



La fonction semble converger vers 2 en $-\infty$.



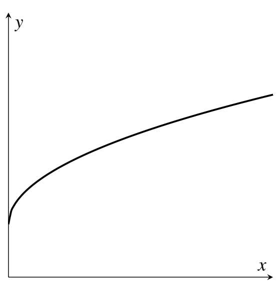
La fonction semble ne pas admettre de limites (oscillations).

Exemple 1.2

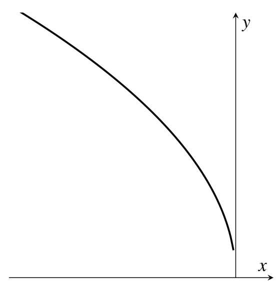
$$\lim_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x} = \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x =$$

Définition 1.3 — Convergence vers l'infini. Soit ℓ un réel.

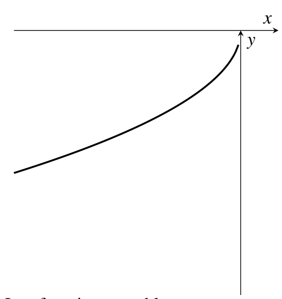
	Voisinage	Notation	Définition
Cv. en $+\infty$ vers $+\infty$	$I=]a,+\infty[$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists A\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ \ x\geqslant A\Rightarrow f(x)\geqslant M$
Cv. en $-\infty$ vers $+\infty$	$I=]-\infty,b[$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$	$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists A\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ \ x\leqslant A\Rightarrow f(x)\geqslant M$
Cv. en $+\infty$ vers $-\infty$	$I=]a,+\infty[$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$	$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists A\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ \ x\geqslant A\Rightarrow f(x)\leqslant M$
Cv. en $-\infty$ vers $-\infty$	$I=]-\infty,b[$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists A\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ \ x\leqslant A\Rightarrow f(x)\leqslant M$



La fonction semble converger vers $+\infty$ en $+\infty$.



La fonction semble converger vers $+\infty$ en $-\infty$.



La fonction semble converger vers $-\infty$ en $-\infty$.

Exemple 1.4

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 = \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 =$$

1.2 Limite en un point, à gauche ou à droite

Définition 1.5 — Limite à droite en un point. Soit $\ell\in\mathbb{R}$.

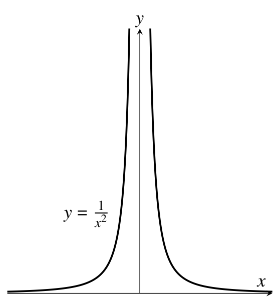
	Voisinage	Notation	Définition
Cv. en x_0^+ vers ℓ	$I=]x_0,b[$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ \ \lvert x-x_0\rvert<\alpha\Rightarrow\lvert f(x)-\ell\rvert\leqslant\varepsilon$
Cv. en x_0^+ vers $+\infty$	$I=]x_0,b[$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$	$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists A\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ \ x\geqslant A\Rightarrow f(x)\geqslant M$
Cv. en x_0^+ vers $-\infty$	$I=]x_0,b[$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$	$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists A\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ \ x\leqslant A\Rightarrow f(x)\leqslant M$

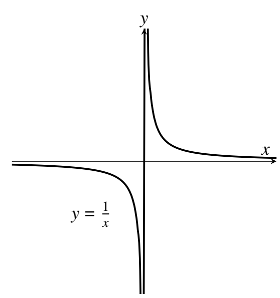
Définition 1.6 — Limite à gauche en un point. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

	Voisinage	Notation	Définition
Cv. en x_0^- vers ℓ	$I =]a, x_0[$	$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \ \lvert x - x_0 \rvert < \alpha \Rightarrow \lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant \varepsilon$
Cv. en x_0^- vers $+\infty$	$I =]a, x_0[$	$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$	$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \ x \geqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M$
Cv. en x_0^- vers $-\infty$	$I =]a, x_0[$	$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$	$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \ x \leqslant A \Rightarrow f(x) \leqslant M$

Exemple 1.7 Etudier les limites en 0^+ et 0^- des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$. *On donne en plus les graphes de ces deux fonctions.*

Limite	Intervalle	Point où on étudie la limite	Résultat
$x \mapsto \frac{1}{x}$ en 0^+			
$x \mapsto \frac{1}{x}$ en 0^-			
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en 0^+			
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en 0^-			





1.3 Limite en un point

Définition 1.8 — Limite en un point. On dit que f admet une limite (finie ou infinie) en un point x_0 si

- elle admet une limite en x_0^+,
- elle admet une limite en x_0^-,
- et que ces deux limites coïncident.

On note alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Proposition 1.9 Si f possède une limite finie en x_0 alors f est bornée au voisinage de x_0.

Exemple 1.10

Limite	Limite à droite	Limite à gauche	Résultat
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en 0			
$x \mapsto \frac{1}{x}$ en 0			

Exemple 1.11 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x > 0 \\ x^2+x+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Étudier la limite en 0 de f.

Exemple 1.12 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Étudier la limite en 0 de f.

Proposition 1.13 Si f est définie en x_0 et possède une limite en x_0 alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Exemple 1.14 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \to 2} x^2 =$

b) $\lim_{x \to 0} \exp(x) =$

c) $\lim_{x \to 1} \sqrt{x} =$

d) $\lim_{x \to 1} \ln(x) =$

1.4 Unicité de la limite

Proposition 1.15 Si une fonction admet une limite finie, en un point ou en $+\infty$ ou en $-\infty$, alors sa limite est unique.

Attention, on a unicité de la limite à droite et unicité de la limite à gauche mais cela ne veut pas dire que les limites à droite et à gauche sont les mêmes (cf exemples précédents). De plus, on ne parle pas d'unicité pour les limites infinies mais une fonction ne peut pas non plus avoir deux limites infinies "différentes".

2 Calculer une limite

2.1 Les limites des fonctions usuelles

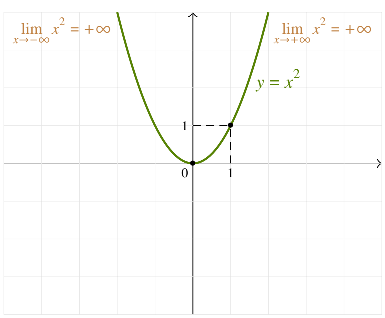
Proposition 2.1 — Fonctions puissances entières. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

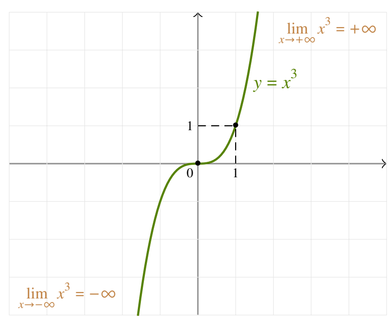
- **Cas n pair :**

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

- **Cas n impair :**

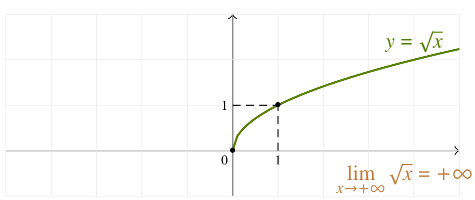
$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$





Proposition 2.2 — Fonction racine carrée. On a

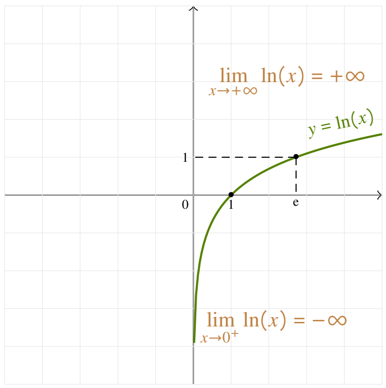
$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

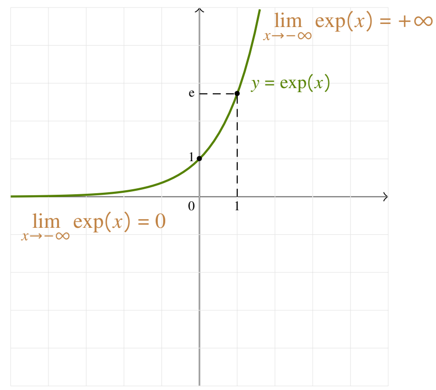


Proposition 2.3 — Logarithme & Exponentielle. On a

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$





2.2 Opérations sur les limites

Pour calculer des limites de fonctions, on rappelle les règles de calcul suivantes. On retiendra notamment les **formes indéterminées** :

$$+\infty-\infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \text{et} \quad 0\times\infty.$$

Pour le produit et le quotient, on détermine le signe du résultat selon la règle des signes du produit de deux réels. Soient $(\ell,\ell') \in \mathbb{R}^2$.

ℓ	$+$	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	$+$	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$+$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+$	$-\infty$	F. I.

ℓ	$\times$	ℓ'	$\ell\times\ell'$
$\ell\neq 0$	$\times$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\times$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	$\times$	$\pm\infty$	F. I.

ℓ	$/$	$\ell'\neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$/$	$\pm\infty$	$0^{\pm}$
$\ell\neq 0$	$/$	$0^{\pm}$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$/$	$0^{\pm}$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$/$	$\pm\infty$	F. I.
0	$/$	0	F. I.

Exemple 2.4 Calculer les limites suivantes.

$x\mapsto -3\mathrm{e}^x$ en $+\infty$	
$x\mapsto 2\ln(x)$ en $+\infty$	
$x\mapsto \sqrt{x}(2-x)$ en $+\infty$	
$x\mapsto \ln(x)\times\mathrm{e}^x$ en 0	
$x\mapsto x^3\times\mathrm{e}^x$ en $-\infty$	
$x\mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ en 0^+	

$x\mapsto \frac{1}{(x-4)^2}$ en 4	
$x\mapsto \frac{1}{x-1}$ en 1^-	
$x\mapsto x^2+x$ en $+\infty$	
$x\mapsto \mathrm{e}^x+5$ en $-\infty$	
$x\mapsto x^3+1$ en $+\infty$	
$x\mapsto x^2+x^3$ en $-\infty$	

Exemple 2.5 Calculer la limite des quotients suivants.

Limite	Limite num.	Limite dénom.	Résultat
$x \mapsto \frac{e^{2x}-1}{\ln(x)+x}$ en 0^+			
$x \mapsto \frac{x+3}{x+7}$ en $(-7)^+$			
$x \mapsto \frac{x+2}{(x-2)(x+5)}$ en 2^-			
$x \mapsto \frac{x^2+x-1}{x^2-4}$ en 2^+			
$x \mapsto \frac{x^2+x-1}{x^2-4}$ en 2^-			

Proposition 2.6 Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I telle que, pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$ et g une fonction définie sur J. Soit x_0 un élément de I ou une de ses extrémités.

$$\text{Si} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = X_0 \quad \text{et} \quad \lim_{X \to X_0} g(X) = \ell \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell.$$

Ici, x_0, X_0 et ℓ peuvent être des nombres réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple 2.7

Limite	Limite “à l’intérieur”	Limite “autour”	Résultat
$x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x}+25}$ en $+\infty$			
$x \mapsto \left(\frac{1}{x}+5\right)^9$ en 0^-			
$x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0^-			
$x \mapsto e^{-2x+3}$ en $-\infty$			
$x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ en 1^+			

Proposition 2.8 — Caractérisation séquentielle des limites. Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \bar{R}$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(P1) On a $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

(P2) Pour toute suite (u_n) d’éléments de I qui converge vers a alors, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Ce résultat est très utile pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en a. Pour ce faire, on peut en effet trouver deux suites (u_n) et (v_n) qui converge vers a telles que les suites $(f(u_n))$ et $f((v_n))$ n'ont pas la même limite.

Exemple 2.9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin(x)$$

Montrer que f n'a pas de limite en $+\infty$.

2.3 Résoudre une forme indéterminée

a) Croissances comparées

Proposition 2.10 — Logarithme v.s. puissance. Pour tous $a, b > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^a}{x^b} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^b |\ln x|^a = 0$$

Proposition 2.11 — Logarithme v.s. exponentielle. Pour tous $a, b > 0$,

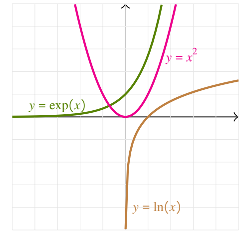
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{(\ln x)^b} = +\infty$$

Proposition 2.12 — Exponentielle v.s. puissance. Pour tous $a, b > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^{ax} = 0$$

On peut résumer de manière informelle en disant que, au voisinage de $+\infty$,

logarithme $<<$ puissances $<<$ exponentielle



Exemple 2.13

Limite	Forme indéterminée	Terme "le plus fort"	Résultat
$x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ en $+\infty$			
$x \mapsto x\ln(x)$ en 0^+			
$x \mapsto \frac{e^x}{x^2\sqrt{x}}$ en $+\infty$			
$x \mapsto \frac{x^2\ln(x)}{x-1}$ en 0^+			
$x \mapsto e^{x\ln(x)}$ en 0^+			

b) Factorisation par le terme le "plus fort"

Comme pour les suites, pour résoudre une forme indéterminée, on peut factoriser par le terme le plus fort.

Exemple 2.14 Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x+x}{\ln(x)+x^2}$.

c) Limite en un point fini (Introduction aux taux d'accroissements)

Lorsque l'on étudie une limite en un nombre réel a différent de 0 et que l'on tombe sur une forme indéterminée, il faut factoriser en haut et en bas par $x-a$ puis simplifier pour faire disparaître la forme indéterminée.

Limite	Factorisation	Résultat
$x \mapsto \frac{x^2-0^2}{x-0}$ en 0		
$x \mapsto \frac{x+1}{x^2-1}$ en -1		
$x \mapsto \frac{x^2-4}{x^2+3x-10}$ en 2		
$x \mapsto \frac{x^2-a^2}{x-a}$ en a		

d) Changement de variables

Pour simplifier l'écriture d'une limite, on peut aussi effectuer un changement de variables.

Limite	Chg. Variable	Nvlle Limite	Résultat
$x \mapsto x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ en 0^+			
$x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}$ en $+\infty$			

3 Théorèmes concernant les limites

3.1 Passage à la limite dans une inégalité

Proposition 3.1 — Passage à la limite dans une inégalité. Soient f et g deux fonctions définies sur I contenant x_0. On suppose que
(H1) Pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leqslant g(x)$
(H2) La fonction f admet une limite finie ℓ_f en a
(H3) La fonction g admet une limite finie ℓ_g en a
Alors,

$$\ell_f \leqslant \ell_g$$

! Ce théorème ne donne pas l'existence d'une limite pour f et g. Pour pouvoir l'appliquer, il faut déjà savoir que ces limites existent. De plus, comme pour les suites, le passage à la limite transforme les inégalités strictes en inégalités larges. Par exemple,

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{x} > 0 \qquad \text{mais} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \geqslant 0.$$

Exemple 3.2 Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(g(x)).$$

Si f admet une limite finie ℓ en $+\infty$, que doit nécessairement vérifier ℓ ?

3.2 Existence de limite par encadrement

Proposition 3.3 — Théorème d'encadrement/des gendarmes. Soient f, g et h trois fonctions définies sur I à valeurs réelles. On suppose que

(H1) Pour tout $x \in I$, on a $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.

(H2) On a $\lim_{x \to a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Alors,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

> ! Attention à ne pas confondre le théorème de passage à la limite dans une inégalité et le théorème d'encadrement. Le théorème d'encadrement permet de démontrer l'existence d'une limite là où pour appliquer le théorème de passage à la limite dans une inégalité, il est nécessaire de savoir que la limite existe au préalable.

Exemple 3.4 Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1.$$

Exemple 3.5 Soit f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}, \quad f(x) = \frac{3 - \cos(x)}{x - 3}.$$

Déterminer, si elle existe, la limite de f en $+\infty$.

Proposition 3.6 — Théorème des gandarmes, cas particulier. Soient f et ε deux fonctions définies sur I à valeurs réelles. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que

(H1) Pour tout $x \in I$, on a $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon(x)$.

(H2) On a $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Alors,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

Exemple 3.7 Soient ε une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 en 0 et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui est bornée. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x) \times \varepsilon(x).$$

Déterminer, si elle existe, la limite de f en 0.

Proposition 3.8 — Théorème d'existence de limite valant $\pm\infty$ par minoration. Soient f et g deux fonctions définies sur I (contenant a) à valeurs réelles telles que

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant g(x).$$

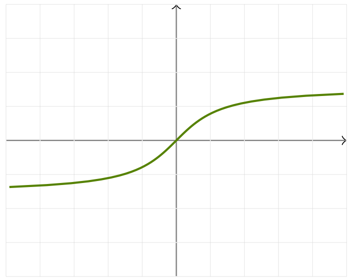
1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.
2. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Exemple 3.9 Déterminer, si elles existent, les limites de la fonction partie entière en $+\infty$ et en $-\infty$.

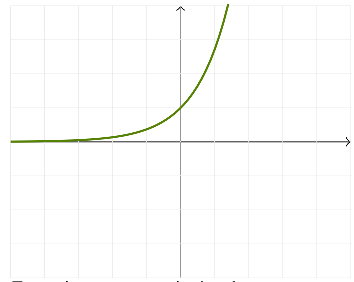
3.3 Fonctions monotones

Proposition 3.10 — Théorème de la limite monotone. Soit f une fonction monotone sur l'intervalle **ouvert** $I =]a, b[$ (avec $a < b$, éventuellement infinis). Alors, f possède une limite (finie ou infinie) en a et en b. Plus précisément,

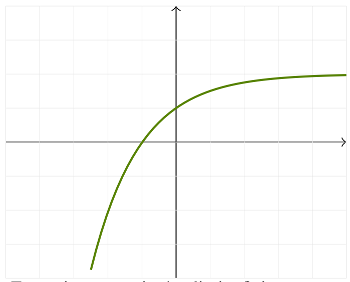
	f croissante	f décroissante
f majorée	limite finie en b	limite finie en a
f non majorée	diverge en $+\infty$ en b	diverge vers $+\infty$ en a
f minorée	limite finie en a	limite finie en b
f non minorée	diverge en $-\infty$ en a	diverge en $-\infty$ en b



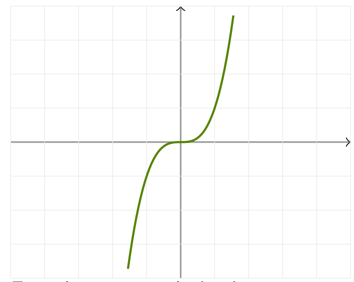
- Fct croissante majorée : limite finie en $+\infty$
- Fct croissante minorée : limite finie en $-\infty$



- Fct croissante non majorée : dv vers $+\infty$ en $+\infty$
- Fct croissante minorée : limite finie en $-\infty$



- Fct croissante majorée : limite finie en $+\infty$
- Fct croissante non minorée : dv vers $-\infty$ en $-\infty$



- Fct croissante non majorée : dv vers $+\infty$ en $+\infty$
- Fct croissante non minorée : dv vers $-\infty$ en $-\infty$

Exemple 3.11 Soient f une fonction décroissance définie sur $\mathbb{R}$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - x.$$

Montrer que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

4 Introduction à l'analyse asymptotique

Définition 4.1 On appelle **voisinage** de

- $a \in \mathbb{R}$ tout intervalle de la forme $]a-h, a+h[$ où $h > 0$,
- $+\infty$ tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$,
- $-\infty$ tout intervalle de la forme $]-\infty, A]$ avec $A \in \mathbb{R}$.

4.1 Introduction aux «petits o»

Définition 4.2 Soient f et g deux fonctions définies au voisinages de a telles que g ne s'annule pas au voisinage de a. On dit que f **est négligeable devant** g **au voisinage de** a, si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

On note $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ ou encore parfois $f \underset{a}{=} o(g)$ (se lit « petit o »).

Interprétation non rigoureuse.

- Si deux fonctions f et g tendent vers $+\infty$ en a, dire que
$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$$
signifie que g tend "plus vite" vers $+\infty$ que f en a, autrement dit « $f(x)$ et $g(x)$ sont très grands, mais $g(x)$ est encore plus grand que $f(x)$ ».
- Si deux fonctions f et g tendent vers 0 en a, dire que
$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$$
signifie que la fonction g tend moins vite vers 0 que la fonction f en a, « $f(x)$ et $g(x)$ sont très petits, mais $g(x)$ reste plus grand que $f(x)$ ».

Exemple 4.3 Donner la bonne comparaison entre les deux fonctions données.

À comparer	Comparaison	Justification
$x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ en $+\infty$		
$x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ en 0		
$x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en $+\infty$		
$x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en 0		
$x \mapsto x$ et $x \mapsto \exp(x)$ en $+\infty$		
$x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \ln(x)$ en 0		

4.2 Introduction aux équivalents

Définition 4.4 Soient f et g deux fonctions définies au voisinages de a telles que g ne s'annule pas au voisinage de a. On dit que f **est équivalent à** g **au voisinage de** a, si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$$

On note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou encore parfois $f \underset{a}{\sim} g$ (se lit « équivalent o »).

Règle d'or pour les équivalents. On n'écrit JAMAIS d'une fonction est équivalente à 0.

De manière non rigoureuse, déterminer un équivalent permet de se débarrasser de tous les termes trop faibles. Dans une somme, on ne gardera que le terme le plus fort/grand.

Exemple 4.5 Donner un équivalent simple de la fonction donnée.

À comparer	Comparaison	Justification
$x \mapsto x^2 - 1$ en $+\infty$		
$x \mapsto 2x^2 - 3x + 5$ en $+\infty$		
$x \mapsto 3x - x^2 + x^4$ en 0		
$x \mapsto 1 + \mathrm{e}^x + 3x$ en $+\infty$		
$x \mapsto 5x^2 + 3\ln(x)$ en $+\infty$		

Proposition 4.6 Soit P une fonction polynomiale à coefficients réels de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_q x^q$$

avec $n > q$, $a_n \neq 0$ et $a_q \neq 0$. Alors

a) En $\pm\infty$: $P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n$

b) En 0 : $P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_q x^q$

Proposition 4.7 Les opérations usuelles (produit, inverse, quotient, puissance constante) sont les suivantes :

- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $\lambda f(x) \underset{x\to a}{\sim} \lambda g(x)$
- Si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$ alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)g_2(x)$
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{g(x)}$
- Si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$ alors $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si f et g sont >0 au voisinage de a alors $f^\alpha(x) \underset{x\to a}{\sim} g^\alpha(x)$.

On NE peut PAS additionner des équivalents On ne peut pas composer à gauche par une fonction. On ne passe donc pas aux exponentielles dans les équivalents, ni aux logarithmes, ni à une puissance qui dépend de n ou qui n'est pas constante ! Par exemple,

$$x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x \qquad \text{pourtant} \qquad \cancel{\mathrm{e}^{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x}$$

Proposition 4.8 Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a et $\ell \in \mathbb{R}^*$. Si

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$$

alors

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$$

Pour déterminer la limite d'une fonction, on peut donc en chercher un équivalent simple et trouver la limite de cet équivalent.

Exemple 4.9 Trouver un équivalent simple de la fonction et en déduire sa limite.

À comparer	Comparaison	Limite
$x \mapsto x^3 + x^2$ en $-\infty$		
$x \mapsto \frac{3x^2+1}{x-1}$ en $+\infty$		
$x \mapsto \frac{3x^2+1}{x-1}$ en 1^+		
$x \mapsto \frac{x^2+e^{-2x}+2}{\sqrt{x}+2x-3}$ en $+\infty$		

Proposition 4.10 On a les équivalents usuels suivants,

a) $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ b) $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ c) $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

En particulier, pour toute fonction u telle que $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$, on a,

a) $e^{u(x)} - 1 \underset{x\to a}{\sim} u(x)$ b) $\sin(u(x)) \underset{x\to a}{\sim} u(x)$ c) $\ln(1+u(x)) \underset{x\to a}{\sim} u(x)$

Exemple 4.11 Compléter les équivalents suivants.

a) $e^{x^2} - 1 \underset{x\to 0}{\sim}$

b) $\sin(\frac{1}{x}) \underset{x\to +\infty}{\sim}$

c) $\sin(x-1) \underset{x\to 1}{\sim}$

d) $\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{x\to +\infty}{\sim}$

5 Brève extension aux suites complexes

D'une manière générale, de même que pour les suites, on pourra étendre aux fonctions à valeurs complexes les propriétés des fonctions à valeurs réelles ne faisant pas intervenir de relation d'ordre dans l'ensemble d'arrivée. En particulier, toutes les notions de limite, sauf celles de divergence vers $\pm\infty$ peuvent être étendues en gardant une définition similaire, la notation $|\cdot|$ désignant maintenant le module et non plus la valeur absolue.

De plus, on peut faire le lien suivant entre convergence pour les fonctions complexes et pour les fonctions réelles.

Proposition 5.1 Soient $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in \bar{I}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes.

(P1) La fonction (complexe) f admet une limite en a.

(P2) Les fonctions (réelles) $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ admettent des limites en a.

Dans ce cas,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \mathrm{Re}(f(x)) + i \lim_{x\to a} \mathrm{Im}(f(x))$$

On peut transposer	**On ne peut pas transposer**
• les opérations sur les limites finies • la caractérisation séquentielle des limites.	• tout ce qui concerne les limites infinies • le passage à la limite • le théorème des gendarmes • le théorème de la limite monotone