TD 18 – Limite d'une fonction

1 Calculs de limites

Exercice 1 – Calculs de limite, sans FI. Calculer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{1}{x^3}$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3}$

4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{9}{x\sqrt{x}}$

5) $\lim\limits_{x\to -\infty} -2x^5 + \frac{6}{x} + 13$

6) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x^2+x+1}$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}$

8) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{3x^2+2x+1}{x-2}$

9) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{-2x-5}{\sqrt{x-3}}$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(1+\sqrt{x})$

Exercice 2 – Calculs de limite, avec FI. Calculer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{2x^2-2x+1}$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{2x-1}}{(\ln(x))^4}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^3+1}{x^2-1}$

4) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2+3x-\frac{1}{4x+1}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{x+1}$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x-x+1}{x+\ln(x)}$

7) $\lim\limits_{x\to -\infty} (6+x^2)e^x$

8) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3-e^{2x}$

Exercice 3 – Calculs de limites. Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-1)\ln(x-1)$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}-\frac{1}{x^2-9}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x+1)-\ln(x+4)$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{3+x^2}$

h) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Exercice 4 – Des limites, encore... Déterminer les limites suivantes.

1) $x\mapsto (\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$ en 0

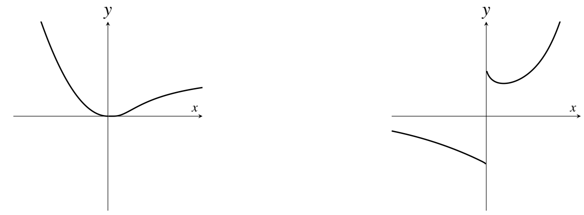
2) $x\mapsto (\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$

Exercice 5 – Fonctions définies par morceaux. Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0 \\ x^2 & \text{si } x\leqslant 0\end{cases}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ g(x)=\begin{cases} e^{x\ln(x)} & \text{si } x>0 \\ \dfrac{xe^x}{1-e^x} & \text{si } x<0\end{cases}$$

1. Déterminer si la fonction f admet une limite en 0.
2. Déterminer si la fonction g admet une limite en 0. *On pourra utiliser le résultat de l'Exercice 7.*
3. Parmi les deux courbes tracées ci-dessous, déterminer celle représentative de la fonction f et celle représentative de la fonction g.



Exercice 6 – Limites en un réel. Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x+2}{-x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x-2}{x^2-4x+4}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

2 Théorèmes généraux sur les limites

Exercice 7 – Limite classique (par encadrement).

1. Démontrer l'encadrement suivant,

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad 1+x\leq e^x\leq 1+xe^x$$

2. En déduire la limite en 0 de la fonction $x\mapsto \frac{e^x-1}{x}$.

Exercice 8 – Limite classique (par encadrement).

1. Démontrer l'encadrement suivant,

$$\forall x>-1,\qquad \frac{x}{1+x}\leq \ln(1+x)\leq x$$

2. En déduire la limite en 0 de la fonction $x\mapsto \frac{\ln(x+1)}{x}$.
3. En déduire les limites suivantes

$$x\mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \text{ en } +\infty \qquad \text{et} \qquad x\mapsto (1+x)^{\ln(x)} \text{ en } 0^+$$

Pour calculer ses limites, on passera par la forme exponentielle.

Exercice 9 – Calcul de limite par encadrement. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x\geqslant 4,\qquad \ln(2)\leq f(x)\leq 2\ln\left(\frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)$$

Déterminer la limite en $+\infty$ de f.

Exercice 10 – Calcul de limite par minoration.

1. Démontrer l'encadrement suivant,

$$\forall x\geq 0,\qquad e^x\geq x^2$$

2. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction $x\mapsto \frac{e^x}{x}$.

Exercice 11 – Théorème de la limite monotone - Illustrations. Tracer l'allure d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants,

1. Fonction croissante majorée et minorée
2. Fonction croissante majorée et non minorée
3. Fonction croissante non majorée et minorée
4. Fonction croissante non majorée et non minorée

5. Fonction décroissante majorée et minorée
6. Fonction décroissante majorée et non minorée
7. Fonction décroissante non majorée et minorée
8. Fonction décroissante non majorée et non minorée

et indiquer ce que cela implique sur les limites en $\pm\infty$.

Exercice 12 – Théorème de la limite monotone. Soient f une fonction décroissance définie sur $\mathbb{R}$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - x.$$

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

3 Introduction à l'analyse asymptotique

Exercice 13 – Sur les petits o. Parmi les deux fonctions données, dire qui est un petit o de qui pour l'asymptotique demandée.

a) $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^4$ en $+\infty$
b) $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^4$ en 0
c) $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ en $+\infty$
d) $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ en 0
e) $x \mapsto (\ln(x))^3$ et $x \mapsto x^2$ en $+\infty$
f) $x \mapsto x^{11}$ et $x \mapsto e^x$ en $+\infty$
g) $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto e^x$ en $+\infty$
h) $x \mapsto (\ln(x))^5$ et $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ en 0^+

Exercice 14 – Equivalents et limites. Donner un équivalent simple des fonctions suivantes et en déduire la limite correspondante.

a) $x \mapsto x^3 + x^2 + 1$ en $+\infty$
b) $x \mapsto x^3 + x^2 + 1$ en 0
c) $x \mapsto x^2 + \ln(x) + e^{-x}$ en $+\infty$
d) $x \mapsto \frac{1}{x} + e^{-x}$ en $+\infty$
e) $x \mapsto \ln(-x) + x^3$ en $-\infty$
f) $x \mapsto e^x + x^2$ en $+\infty$

Exercice 15 – Equivalents et limites. Donner un équivalent simple pour les quotients suivants en 0 et en $+\infty$ et en déduire leurs limites en 0 et $+\infty$.

a) $x \mapsto \dfrac{-2x^6 + x^4 + 1}{x^3 - x^2}$
b) $x \mapsto \dfrac{\ln(x) + 4x + 1}{2\sqrt{x} + 3\ln(x)}$
c) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x^2+1}}$
d) $x \mapsto \dfrac{1 + 2x^2}{(1+2x^2)^3}$
e) $x \mapsto \dfrac{4}{(2x-3)(2x+6)}$
f) $x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^8}}$

Exercice 16 – Equivalents et limites. Donner un équivalent simple des termes suivants et en déduire leurs limites.

a) $x \mapsto x(x+1)(x+2)\dots(x+p)$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ en 0 et en $+\infty$
b) $x \mapsto \sqrt{2+x}\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)$ en $+\infty$
c) $x \mapsto \left(e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1\right)\sin\left(\dfrac{4}{x^2}\right)$ en $+\infty$
d) $x \mapsto xe^{\frac{1}{x}} - x$ en $+\infty$
e) $x \mapsto \dfrac{\cos(4x)\ln(1+x^2)}{\sin(x^2)\cos(x)}$ en 0.
f) $x \mapsto \dfrac{\ln(x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}\ln(1+x)\sin(3x)}$ en 0
g) $x \mapsto \dfrac{\sin(4x)}{\sin(2x)}\cos(x)$ en 0
h) $x \mapsto \dfrac{e^{2x}\sin(x)}{x}$ en 0

4 Approfondissement

Exercice 17 – Étude de fonctions. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer : son ensemble de définition, sa parité, ses limites aux bornes de son ensemble de définition, son tableau de variations et tracer l'allure de la courbe.

a) $x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
b) $x \mapsto \ln(x^2+1) - x$
c) $x \mapsto x^2 e^{-x}$
d) $x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2-1}$

Exercice 18 – Étude de fonction. Soit f la fonction définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) = (x-1)\exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites en $+\infty$, 0 et 1^-.
3. Déterminer la limite de $ue^{\frac{1}{u}}$ quand $u \to 0^+$.
4. En déduire la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^+$. *On utilisera le fait que pour tout réel $u > -1$, $\ln(1+u) \leq u$.*

Exercice 19 – Vrai ou Faux ?. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsque l'assertion est fausse, donner un contre-exemple (on pourra se contenter d'un graphe).

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - a) = 0$.
2. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et majorée par 1, alors elle tend vers 1 en $+\infty$.
3. Si $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2} g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to2} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$
5. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 1$
6. Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
7. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et qu'elle tend vers 5 en $+\infty$ alors f est majorée par 5.
8. Si f est définie sur $\mathbb{R}$, alors soit elle admet une limite finie en $+\infty$, soit elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 20 – Démonstration des croissances comparées.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leqslant \sqrt{x}$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$.
3. À partir de la limite précédente, montrer les résultats de croissance comparée suivants (où $a \in \mathbb{R}_+^*$) :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^a}$
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^a}{e^x}$
c) $\lim\limits_{x\to0} x^a\ln(x)$