

Probabilités sur un univers fini.

- Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités; définition d'une probabilité sur l'univers, définition d'une probabilité sur l'univers à partir de la probabilité de chaque événement élémentaire, définition de la probabilité uniforme sur un univers (lien avec le cardinal des événements), propriétés d'une probabilité (complémentarité, différence, réunion, croissance), définition d'un système complet d'événements de l'univers.
- Définition de la probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales sur un système complet d'événements de l'univers, formule de Bayes.
- Définition de deux événements indépendants, de n événements deux à deux indépendants, définition de l'indépendance mutuelle pour une famille finie d'événements, lien avec l'indépendance 2 à 2.

Applications linéaires.

- Définition et notation de l'ensemble des applications linéaires entre deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, caractérisation, définition d'un endomorphisme, définition de l'homothétie, définition d'un isomorphisme, opérations sur les applications linéaires (linéarité, composition), réciproque d'un isomorphisme.
- Définitions de l'image et du noyau d'une application linéaire, structure des sous-espaces vectoriels de l'image et du noyau, caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité à l'aide du noyau et de l'image, image d'une application linéaire à l'aide d'une famille finie génératrice de l'espace de départ.
- Automorphismes : définition, notation, propriétés.
- Existence et unicité d'une application définie par l'image d'une base de l'espace de départ, caractérisation de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application linéaire par l'image d'une base de l'espace de départ, caractérisation de la bijectivité si les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension, définition et caractérisation de deux espaces vectoriels isomorphes, dimension de l'ensemble des applications linéaires entre deux espaces vectoriels de dimension finie.
- Définition du rang, propriétés, forme géométrique du théorème du rang : Si S est un supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans E , alors $f|_S$ est un isomorphisme de S dans $\text{Im } f$. Théorème du rang.

Dérivabilité

- Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité d'ordre 1, dérivabilité à gauche et droite (demi-tangente), caractérisation de la dérivabilité en un point à l'aide de la dérivabilité à gauche et à droite.
- Fonction dérivée, opérations sur les fonctions dérivées (somme, produit, quotient, composition et réciproque).
- Définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle, expression de la dérivée n -ième d'une somme, d'un produit (formule de Leibniz), quotient, composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, réciproque d'une fonction bijective de classe $\mathcal{C}^n$.
- Définition d'un point critique, d'un maximum local, d'un minimum local d'un extremum local, condition nécessaire pour avoir un extremum local en un point intérieur, théorème de Rolle et égalité des accroissements finis, fonction K -lipschitzienne et inégalité des accroissements finis, dérivabilité et monotonie, théorème de la limite de la dérivée.

Un énoncé au choix à demander :

- ☐ Définition d'un système complet d'événements de l'univers.
- ☐ Formule des probabilités composées.
- ☐ Formule des probabilités totales.
- ☐ Formule de Bayes.
- ☐ Définition de 2 événements indépendants et de deux événements incompatibles.
- ☐ Définition d'une p -liste, d'un arrangement de p éléments, d'une permutation et d'une combinaison de p éléments d'un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
- ☐ Définition d'un endomorphisme, d'un isomorphisme, d'un automorphisme.
- ☐ Caractérisation d'une application linéaire.
- ☐ Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire.
- ☐ Définition du rang d'une application linéaire et théorème du rang.
- ☐ Donner deux méthodes pour montrer qu'une application linéaire est injective.
- ☐ Donner deux méthodes pour montrer qu'une application linéaire est surjective.
- ☐ Donner deux méthodes pour montrer qu'une application linéaire est bijective.
- ☐ Définition de deux espaces vectoriels isomorphes et caractérisation en dimension finie.
- ☐ Définition de la dérivabilité à gauche et à droite d'une fonction à valeurs réelles en un point.
- ☐ Caractérisation de la dérivabilité en un point intérieur à l'aide de la dérivabilité à gauche et de la dérivabilité à droite.
- ☐ Définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- ☐ Formule de Leibniz pour les fonctions.
- ☐ Définition d'un maximum local et d'un minimum local.
- ☐ Définition d'une fonction K -lipschitzienne, $K > 0$.
- ☐ Inégalité des accroissements finis.

Démonstrations :

- ☐ Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire par le noyau.
- ☐ Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, E de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et considérons $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Démontrer que f est injective sur E si et seulement si $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre.
- ☐ Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Démontrer que si f est dérivable en a et si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.
Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.

Exercices traités dans au moins l'une des deux classes :

TD 11 : exercice 1, exercice 2, exercice 3, exercice 4, exercice 5, exercice 6, exercice 8, exercice 9, exercice 11.

TD 12 : exercice 1, exercice 2, exercice 4, exercice 7, exercice 8, exercice 10, exercice 11, exercice 12 questions 1 et 2, exercice 13 questions 1 et 2, exercice 14 questions 1 et 2.

Exercices traités en autonomie :

Cahier de vacances en ligne sur le site.

TD 11 : exercice 7, exercice 10, exercice 12.

TD 12 : exercice 3, exercice 6, exercice 9, exercice 13 question 3.