

EXERCICE 1

Les applications suivantes sont-elles linéaires? Lorsqu'elles le sont, déterminer le noyau et l'image.

$$8. \quad f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto P + (1-X)P'$$

- Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q) + (1-X)(\lambda P + Q)' \\ &= \lambda P + Q + (1-X)(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda(P + (1-X)P') + Q + (1-X)Q' \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

- Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors $\deg(P) \leq 2$. Donc $\deg(P') \leq 1$. Or $\deg(1-X) = 1$ donc $\deg((1-X)P') \leq 2$. D'où $\deg(f(P)) \leq 2$. Ainsi $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

f est bien une application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

- Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors $\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aX^2 + bX + c$.

$$P \in \text{Ker } f \iff f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \iff P + (1-X)P' = 0_{\mathbb{R}_2[X]}.$$

$$\text{Or } f(P) = aX^2 + bX + c + (1-X)(2aX + b) = -aX^2 + 2aX + b + c.$$

$$\text{Donc } P \in \text{Ker } f \iff \begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = -c \end{cases} \iff P = c(-X + 1)$$

Donc $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(1-X)$.

- $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ donc $\text{Im } f = \text{Vect}((f(1), f(X), f(X^2)))$.

$$\text{Or } f(1) = 1, f(X) = 1 \text{ et } f(X^2) = 2X - X^2 \text{ donc } \text{Im } f = \text{Vect}(1, 2X - X^2).$$

$$10. \quad f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^T$$

- Soit $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\lambda M + N) = (\lambda M + N)^T = (\lambda M)^T + N^T = \lambda M^T + N^T = \lambda f(M) + f(N).$$

Donc f est linéaire.

- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$M \in \text{Ker } f \iff M^T = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \iff M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}. \text{ Donc } \text{Ker } f = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}.$$

- Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$N \in \text{Im } f \iff \exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M^T = N.$$

Ceci est vrai pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($M = N^T$ convient) donc

$$\text{Im } f = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

EXERCICE 3

Soit f et g les applications définies sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, 2x)$

et $g(x, y) = (y, x)$.

1. Montrer que f et g sont des automorphismes de $\mathbb{R}^2$.

Déterminer f^{-1} et g^{-1} .

- On montre que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$.

La preuve est laissée au lecteur.

- Montrons que f et g sont bijectives.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Existe-t-il $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (a, b)$?

On suppose qu'un tel couple existe.

$$f(x, y) = (a, b) \iff \dots \iff \begin{cases} y = a - \frac{1}{2}b \\ x = \frac{1}{2}b \end{cases}$$

Ainsi défini, (x, y) est unique. Donc f est bijective.

Ainsi f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$f^{-1}(a, b) = \left(\frac{1}{2}b, a - \frac{1}{2}b\right).$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Existe-t-il $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(x, y) = (a, b)$?

On suppose qu'un tel couple existe.

$$g(x, y) = (a, b) \iff (y, x) = (a, b) \iff (x, y) = (b, a).$$

Ainsi défini, (x, y) est unique. Donc g est bijective.

Ainsi g est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, g^{-1}(a, b) = (b, a)$.

2. On note $h = g \circ f - f \circ g$.

(a) Justifier que $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ donc $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et $f \circ g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Par différence, $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

(b) L'application h est-elle injective? surjective?

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2, h(x, y) = g \circ f(x, y) - f \circ g(x, y) = g(x + y, 2x) - f(y, x) = (2x, x + y) - (y + x, 2y) = (x - y, x - y)$.

$$(x, y) \in \text{Ker}(h) \iff h(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff (x - y, x - y) = (0, 0) \iff x = y.$$

Donc $\text{Ker}(h) = \text{Vect}((1, 1)) \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. Ainsi h n'est pas injective.

$$\begin{aligned} \text{Im}(h) &= \{h(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x - y, x - y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x, y)(1, 1), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((1, 1)) \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Im}(h) \neq \mathbb{R}^2$ donc h n'est pas surjective.

EXERCICE 6

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (4x + 2y - 4z, 2x + 2y - 2z)$.

1. (a) Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker } f &\iff f(x, y, z) = (0, 0, 0) \\ &\iff (4x + 2y - 4z, 2x + 2y - 2z) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} 4x + 2y - 4z = 0 \\ y = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 0, 1))$.

$((1, 0, 1))$ est une famille génératrice de $\text{Ker}(f)$ et libre donc

$((1, 0, 1))$ une base de $\text{Ker}(f)$.

Ainsi $\dim(\text{Ker } f) = 1$.

D'après le théorème du rang, $\dim(\mathbb{R}^3) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker } f)$ donc $\dim(\text{Im } f) = \text{rg}(f) = 3 - 1 = 2$.

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0)) = \text{Vect}((4, 0, 2), (2, 2, 2)).$$

Les vecteurs $(4, 0, 2)$ et $(2, 2, 2)$ ne sont pas colinéaires donc la famille $((4, 0, 2), (2, 2, 2))$ est libre. Elle est génératrice de $\text{Im } f$ donc

$((4, 0, 2), (2, 2, 2))$ est une base de $\text{Im } f$.

(b) Soit $\mathcal{B}'$ la famille formée par concaténation d'une base de $\text{Ker } f$ et d'une base de $\text{Im } f$.

Justifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées, dans $\mathcal{B}'$, des images par f des vecteurs de $\mathcal{B}'$.

Soit $\mathcal{B}' = ((1, 0, 1), (4, 0, 2), (2, 2, 2))$ la famille obtenue en concaténant les bases de $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.

On montre que $\mathcal{B}'$ est libre. La preuve est laissée au lecteur.

$\mathcal{B}'$ est libre et $\text{card}(\mathcal{B}') = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$f(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$ car $(1, 0, 1) \in \text{Ker } f$.

$$f(4, 0, 2) = (8, 0, 4) = 2(4, 0, 2) \text{ et } f(2, 2, 2) = (4, 4, 4) = 2(2, 2, 2).$$

Donc dans la base $\mathcal{B}'$, $f(1, 0, 1)$ a pour coordonnées $(0, 0, 0)$, $f(4, 0, 2)$ a pour coordonnées $(0, 2, 0)$ et $f(2, 2, 2)$ a pour coordonnées $(0, 0, 2)$.

2. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0 \text{ et } -3x - 2y + 4z = 0\}$.

(a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$G \subset \mathbb{R}^3.$$

$$\text{Soit } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z) \in G \iff \dots \iff (x, y, z) = (0, 2z, z).$$

$$\text{Donc } G = \text{Vect}((0, 2, 1)). \text{ Ainsi } \boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}.$$

(b) G et $\text{Im } f$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

$$\text{Im } f = \text{Vect}((4, 0, 2), (2, 2, 2)) \text{ et } G = \text{Vect}((0, 2, 1)).$$

$$\text{Or } (0, 2, 1) = (2, 2, 2) - \frac{1}{2}(4, 0, 2) \text{ donc } (0, 2, 1) \in \text{Im } f. \text{ Alors } \text{Im } f \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\text{Im } f \text{ et } G \text{ ne sont pas supplémentaires dans } \mathbb{R}^3}.$$

EXERCICE 10

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

Montrer que $\text{Ker}(f \circ f) = \text{Ker } f$ si $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$.

($\Rightarrow$) Supposons que $\text{Ker}(f \circ f) = \text{Ker } f$. Montrons que $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$.

★ $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont des sous-espaces vectoriels de E donc $\text{Im } f \cap \text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E . D'où $\{0_E\} \subset \text{Im } f \cap \text{Ker } f$.

★ Soit $x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$. Alors $x \in \text{Im } f$. Donc il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$.

Alors $f(x) = f(f(a))$. Or $x \in \text{Ker } f$, donc $f(x) = 0_E$. D'où $f(f(a)) = 0_E$.

Alors $a \in \text{Ker}(f \circ f)$. De plus, $\text{Ker}(f \circ f) = \text{Ker } f$ donc $a \in \text{Ker } f$.

Alors $f(a) = 0_E$. D'où $x = 0_E$. Ainsi $\text{Im } f \cap \text{Ker } f \subset \{0_E\}$.

Donc $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$. Montrons que $\text{Ker}(f \circ f) \subset \text{Ker } f$.

★ Soit $x \in \text{Ker } f \circ f$. Alors $f \circ f(x) = 0_E$ et donc $f(f(x)) = 0_E$. D'où $f(x) \in \text{Ker } f$.

Or $f(x) \in \text{Im } f$, donc $f(x) \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$.

Par hypothèse, $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$ donc $f(x) = 0_E$. D'où $x \in \text{Ker } f$.

Ainsi $\text{Ker}(f \circ f) \subset \text{Ker } f$.

★ Soit $x \in \text{Ker } f$, alors $f(x) = 0_E$ et donc $f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$.

D'où $f \circ f(x) = 0_E$. Ainsi $x \in \text{Ker}(f \circ f)$ et $\text{Ker } f \subset \text{Ker}(f \circ f)$.

Donc $\text{Ker}(f \circ f) = \text{Ker } f$.

Conclusion : $\boxed{\text{Ker}(f \circ f) = \text{Ker } f \iff \text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}}.$

EXERCICE 12

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^n + ax + b$ s'annule au plus trois fois sur $\mathbb{R}$.

• Si $n \leq 3$, le polynôme $X^n + aX + b$ admet au plus 3 racines réelles donc $f : x \mapsto x^n + ax + b$ s'annule au plus trois fois sur $\mathbb{R}$.

• Si $n \geq 4$, raisonnons par l'absurde : supposons que f s'annule au moins 4 fois sur $\mathbb{R}$.

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 des racines de f telles que $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$.

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur les intervalles $[\alpha_1; \alpha_2]$, $[\alpha_2; \alpha_3]$ et $[\alpha_3; \alpha_4]$ et dérivable sur les intervalles $] \alpha_1; \alpha_2[$, $] \alpha_2; \alpha_3[$ et $] \alpha_3; \alpha_4[$.

De plus $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = f(\alpha_3) = f(\alpha_4) = 0$ donc d'après le théorème de Rolle appliqué trois fois, il existe $c_1 \in] \alpha_1; \alpha_2[$, $c_2 \in] \alpha_2; \alpha_3[$ et $c_3 \in] \alpha_3; \alpha_4[$ tel que

$$f'(c_1) = f'(c_2) = f'(c_3) = 0.$$

f' est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $[c_1; c_2]$ et $[c_2; c_3]$ et dérivable sur $] c_1; c_2[$ et $] c_2; c_3[$.

D'après le théorème de Rolle appliqué deux fois, il existe $\beta_1 \in] c_1; c_2[$ et

$\beta_2 \in] c_2; c_3[$ tels que $f''(\beta_1) = f''(\beta_2) = 0$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ donc 0 est l'unique valeur annulant f'' . Or $\beta_1 \neq \beta_2$ donc c'est absurde.

Ainsi $\boxed{f : x \mapsto x^n + ax + b \text{ s'annule au plus trois fois sur } \mathbb{R}}.$

EXERCICE 13

Démontrer les inégalités suivantes :

$$3. \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} &\iff x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 < (x+1) \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &\iff x(\ln(x+1) - \ln x) < 1 < (x+1)(\ln(x+1) - \ln x) \\ &\iff \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Donc montrer que $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ revient à montrer que

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

Pour tout $t \in [x, x+1]$, posons $f(t) = \ln t$.

f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$.

Donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel

$$c \in]x, x+1[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x}.$$

$$\text{Alors } \exists c \in]x, x+1[/ \frac{1}{c} = \ln(x+1) - \ln x.$$

$$\text{Or } 0 < x < c < x+1 \text{ donc } \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}.$$

$$\text{Ainsi } \forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}, \text{ et donc}$$

$$\boxed{\forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}}.$$

EXERCICE 15

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Après avoir justifié leur existence, calculer la dérivée n -ième de chacune des fonctions f suivantes :

(a) $f : x \mapsto e^x \sin x$

f est un produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

La dérivée $n^{\text{ième}}$ de f existe bien. D'après la formule de Leibniz,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin^{(k)}(x) \exp^{(n-k)}(x).$$

$$\text{Or } \forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, \sin^{(2p)}(x) = (-1)^p \sin(x) \text{ et } \sin^{(2p+1)}(x) = (-1)^p \cos(x).$$

$$\text{De plus, } \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \exp^{(n-k)}(x) = e^x. \text{ Alors } \boxed{\forall x \in \mathbb{R},}$$

$$\boxed{f^{(n)}(x) = e^x \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k}{2}} \sin(x) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cos(x) \right)}$$

(b) $f : x \mapsto x^2(1+x)^n$

$$f = gh \text{ avec } g : x \mapsto x^2 \text{ et } h : x \mapsto (1+x)^n.$$

f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de telles fonctions. La dérivée $n^{\text{ième}}$ de f existe bien.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 3$. D'après la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) \\ &= g(x) h^{(n)}(x) + n g'(x) h^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} g''(x) h^{(n-2)}(x) \\ &\quad + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) \\ &= x^2 h^{(n)}(x) + 2nx h^{(n-1)}(x) + n(n-1) h^{(n-2)}(x) \end{aligned}$$

$$\text{car } \forall k \geq 3, g^{(k)}(x) = 0.$$

Or :

$$h'(x) = n(1+x)^{n-1}$$

$$h''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2},$$

$$h^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}$$

$\vdots$

$$h^{(n-2)}(x) = n(n-1) \cdots 3(1+x)^2 = \frac{n!}{2} (1+x)^2,$$

$$h^{(n-1)}(x) = n!(1+x) \text{ et } h^{(n)}(x) = n!$$

$$\text{Donc } f^{(n)}(x) = x^2 n! + 2nx n!(1+x) + \frac{n(n-1)n!}{2} (1+x)^2.$$

N'oubliez pas de vérifier que la formule est encore valable pour $n=0, n=1$ et $n=2$.

$$\text{Ainsi } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = x^2 n! + 2nx n!(1+x) + \frac{n(n-1)n!}{2} (1+x)^2}.$$

2. Calculer de deux façons différentes la dérivée n -ième de $f : x \mapsto x^{2n}$.

$$\text{En déduire } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

La dérivée $n^{\text{ième}}$ de f existe bien.

1ère méthode : Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2nx^{2n-1}, f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2},$$

$$f^{(3)}(x) = 2n(2n-1)(2n-2)x^{2n-3}, \dots, f^{(n)}(x) = 2n(2n-1)(2n-2) \cdots (n+1)x^n.$$

On montre alors par récurrence que $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!} x^n$.

2ème méthode : $f = g \times g$ avec $g : x \mapsto x^n$.

On utilise donc la formule de Leibniz :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.

$$g^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \text{ donc } g^{(n-k)}(x) = \frac{n!}{k!} x^{n-(n-k)} = \frac{n!}{k!} x^k. \text{ Alors :}$$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k = n! x^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{k!(n-k)!} = n! x^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!} x^n = n! x^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

En particulier pour $x = 1$, on obtient $\frac{(2n)!}{n!} = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ et donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}}.$$